

高等学校教学用书



# 分析力学讲义

FENXI LIXUE JIANGYI

Ф. П. 甘特馬赫著  
钟奉俄 薛問西译



人民教育出版社





52.1  
160.1

高等学校教学用书



# 分析力学讲义

FENXI LIXUE JIANGYI

Φ. P. 甘特馬赫著  
钟奉俄 薛問西譯

3K505/09

中国科学院  
人民教育出版社  
1953年1月

本书系根据苏联国家物理数学书籍出版社 (Физматгиз) 出版的甘特馬赫 (Ф. Р. Гантмахер) 著“分析力学讲义” (Лекции по аналитической механике) 一书 1960 年版譯出的。书中介绍了分析力学的研究方法和分析力学在李亚普諾夫稳定性理論、振动理論、刚体动力学等方面的应用。除振动理論的古典方法外, 还闡述了現代頻率法的基础。也对于把分析力学方法推广到电的和机电的系統中所用的机电模拟进行了討論。

本书为讀者学习狭义相对論、量子力学和理論物理的其它部分打下足够深入的基础, 并詳尽地闡述了力学的变分原理和积分不变量、正則变換和哈密頓-雅科毕方程。

本书可供綜合性大学数学力学系和物理系学生、研究生閱讀。也可以供工程研究人員和其他专家閱讀, 以扩大并加深他們的力学知識。

## 分析力学讲义

Ф. Р. 甘特馬赫著

钟奉俄 薛問西譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

民族印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 K13010·1090 开本 850×1168  $\frac{1}{32}$  印张 8  $\frac{1}{16}$

字数 202,370 印数 0,001-5,500 定价 (6) ¥0.80

1963 年 6 月第 1 版 1963 年 6 月北京第 1 次印刷



## 序

“分析力学”一詞，在力学著述中并无統一涵义。有的作者把分析力学和理論力学看作是等同的<sup>①</sup>。另一些人认为，以广义坐标叙述力学理論是分析力学的主要标志。本书作者所持的第三种观点則是：分析力学的特征既表現在叙述的体系方面，也表現在所探討的問題的範圍方面。

以普遍原理(微分的或积分的)为基础，用分析的方法来导出运动基本微分方程，这就是分析力学叙述体系的特征。闡述力学的普遍原理、由这些原理导出基本运动微分方程，并研究这些方程本身及其积分方法——所有这些就构成分析力学的基本內容。

在綜合性大学及师范学院的数学力学系、物理系及工程物理系的教学大綱里，分析力学是理論力学課程的一部分。而在工科大学的理論力学教学大綱中，或者根本沒有分析力学，或者仅有它的一部分。按照傳統方式分为“靜力学”、“运动学”和“质点及系統的动力学”，而讲授的理論力学教程对于解决現代技术所提出的各种問題是很不够的。在現代技术各領域工作的研究工程师們，对于分析力学的一般方法是應該掌握的，因为这些方法不仅对于研究那些屬於純力学現象的复杂問題，而且也对于研究那些屬於电学現象和机电現象的复杂問題，給出了一个通用的分析工具。

本书并不企图将分析力学的全部分內容包括无遺。本书系根据作者近六年来，在莫斯科物理技术学院对二年級第二学期学生的讲课內容写成的。这种情况也就决定了本书的取材及其讲述特点。

---

<sup>①</sup> 例如，Г. К. Суслов 及 Ш. Ж. Вайле Пуссен 的名著“理論力学教程”曾被作者自己称为“分析力学教程”。



分析力学課程是学习量子力学、狭义相对論及广义相对論等若干理論物理章节的基础。因此，书中詳細地闡述了力学的变分原理和积分不变量、正則变换、哈密頓-雅科毕方程以及具有循环坐标的系統（二、三、四、七諸章）。在引入了 A. 龐伽雷及 D. 卡当的思想之后，作者即以力学积分不变量作为叙述所讲材料的基础。积分不变量在这里并非理論上的裝飾，而是工具。

非自由系統的討論与技术应用有关。第一章中仔細地研究了这类系統。从这一章讲机电模拟的一节可以看出将力学的分析方法推广用于电学系統和机电系統的可能性。五、六两章讲述了分析力学在李亚普諾夫稳定性理論及振动理論方面的应用。除綫性振动理論的古典問題而外，还讲到了近代頻率法的基础。有关剛体动力学的若干問題是分散在几个例子中讲的。

本书設想讀者已經具有理論力学及高等数学的一般基础知识。本书供綜合性大学数学力学系、物理系及工程物理系学生及研究生之用，也可以供那些希望扩充并加深自己在力学方面的知識的工程研究人員及其他专家們閱讀。



# 目 录

序	v
第一章 任意质点系统的运动微分方程	1
§ 1. 自由系统和非自由系统·约束及其分类	1
§ 2. 可能位移和虚位移·理想约束	5
§ 3. 动力学普遍方程·第一类拉格朗日方程	13
§ 4. 虚位移原理·达朗伯原理	18
§ 5. 完整系统·独立坐标·广义力	26
§ 6. 独立坐标下的第二类拉格朗日方程	33
§ 7. 拉格朗日方程的研究	38
§ 8. 总能量变化定理·有势力·迴轉仪力和耗散力	42
§ 9. 机电模拟	48
§ 10. 非完整系统的阿沛尔方程·伪坐标	51
第二章 势场中的运动方程	60
§ 11. 有势力情况下的拉格朗日方程·广义势·非自然系统	60
§ 12. 哈密顿正则方程	65
§ 13. 罗司方程	73
§ 14. 循环坐标	75
§ 15. 泊松括弧	78
第三章 变分原理和积分不变量	84
§ 16. 哈密顿原理	84
§ 17. 第二种型式的哈密顿原理	91
§ 18. 力学基本积分不变量(龐伽雷-卡当积分不变量)	93
§ 19. 基本积分不变量的流体动力学解释·湯姆孙和亥姆霍兹关于环量和渦量的定理	101
§ 20. 广义保守系统·惠特克方程·雅科毕方程·莫培督-拉格朗日最小作用量原理	106
§ 21. 慣性运动·保守系统的任意运动与測地綫的关系	112
§ 22. 龐伽雷通用积分不变量·李华宗定理	114
§ 23. 相空間的体积不变性·刘維定理	120
第四章 正则变换和哈密顿-雅科毕方程	123
§ 24. 正则变换	123
§ 25. 自由正则变换	127



§ 26. 哈密頓-雅科毕方程.....	131
§ 27. 分离变量法·例题.....	137
§ 28. 正则变换在微扰理論中的应用.....	146
§ 29. 任意正则变换的结构.....	149
§ 30. 变换的正则性准则·拉格朗日括弧.....	154
§ 31. 正则变换雅科毕矩陣的耦对性.....	156
§ 32. 正则变换下泊松括弧的不变性.....	159
<b>第五章 系統的平衡稳定性及其运动稳定性</b> .....	162
§ 33. 关于平衡位置稳定性的拉格朗日定理.....	162
§ 34. 平衡位置不稳定准则·李亚普諾夫和契塔也夫定理.....	168
§ 35. 平衡位置的漸近稳定性·耗散系統.....	171
§ 36. 条件稳定性·問題的一般提法·运动或任一过程的稳定性·李亚 普諾夫定理.....	174
§ 37. 綫性系統的稳定性.....	183
§ 38. 按綫性近似的稳定性.....	187
§ 39. 漸近稳定性准则.....	192
<b>第六章 微振动</b> .....	197
§ 40. 保守系統的微振动.....	197
§ 41. 簡正坐标.....	207
§ 42. 周期性外力对保守系統振动的影响.....	210
§ 43. 保守系統頻率的极端性质·頻率随系統慣性和剛性而变的瑞利定 理·約束对頻率的影响.....	212
§ 44. 彈性系統的微振动.....	218
§ 45. 在不显含時間的力的作用下, 平稳系統的微振动.....	224
§ 46. 瑞利耗散函数·小耗散力对保守系統振动的影响.....	226
§ 47. 与時間有关的外力对平稳系統微振动的影响·幅-相特性.....	231
<b>第七章 有循环坐标的系統</b> .....	237
§ 48. 导出系統·罗司勢·隐运动·赫茲关于动能产生势能的概念.....	237
§ 49. 平稳运动的稳定性.....	247
<b>参考书目</b> .....	255
<b>人名索引</b> .....	257
<b>索引</b> .....	259



# 第一章 任意质点系统的运动微分方程

## § 1. 自由系统和非自由系统·约束及其分类

我们来研究质点系统  $P_\nu (\nu=1, \dots, N)$  相对于某惯性坐标系 (伽利略系统) 的运动。系统各个质点的位置和速度受有几何学的或运动学的限制, 这种限制称之为约束。具有这种约束的系统称为非自由系统, 以别于没有这种约束的自由系统。

约束可以用方程

$$f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu) = 0 \quad (1)$$

解析地表示。它的左端包含有时间  $t$  以及系统所有各质点  $P_\nu$  的矢径  $\mathbf{r}_\nu$  和速度  $\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu (\nu=1, \dots, N)$ 。在约束方程 (1) 中不包含速度  $\dot{\mathbf{r}}_\nu$  的特别情形的约束便称之为有限约束或几何约束。它的解析表达式可以写作

$$f(t, \mathbf{r}_\nu) = 0. \quad (2)$$

在一般情况下, 约束 (1) 称为微分约束或运动约束。今后我们仅限于讨论这样的微分约束: 在它的方程中, 速度是线性地出现的, 即

$$\sum_{\nu=1}^N L_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu + D = 0. \quad (3)$$

---

① 字母上加一点 (如  $\dot{\mathbf{r}}_\nu$ ) 表示对应的量对时间的导数。所有矢径都是由固定在给定坐标系中的同一极点引出。往后, 我们将以  $f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu)$  表示函数  $f(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$  的缩写。这种缩写方式将在全书中采用。如果  $x_\nu, y_\nu, z_\nu$  是点  $P_\nu (\nu=1, \dots, N)$  在所讨论的坐标系中的笛卡尔坐标, 则函数  $f$  可以看作  $6N+1$  个纯量  $t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu (\nu=1, \dots, N)$  的函数。对于函数  $f$  以及今后在本书中遇到的所有函数, 在沒有预先申明时, 我们都假定这些函数及其导数是连续的。



式中  $l_v \dot{r}_v$  是矢量  $l_v$  和  $\dot{r}_v$  的数积, 而矢量  $l_v$  和纯量  $D$  则是变量  $t$  和全体  $r_\mu$  的已知函数 ( $\mu, \nu = 1, \dots, N$ )。同时我们还假设全体矢量  $l_v$  不同时为零。

当有形式(2)的有限约束存在时, 在每一给定时刻, 系统就不能够占据空间的任意位置。有限约束在系统于时刻  $t$  的可能位置上加上了一定的限制。当仅有微分约束存在时, 系统于任一时刻  $t$  可以占有空间的任意位置。但在这位置上, 系统各点的速度却不能是任意的。微分约束给这些速度加上了一定的限制。

由每个形式如(2)的有限约束都可以导出一个微分约束, 它的方程可由等式(2)经逐项微分而得到:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f}{\partial r_\nu} \dot{r}_\nu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

式中  $\frac{\partial f}{\partial r_\nu} = \text{grad}_\nu f$  ( $\nu = 1, \dots, N$ )<sup>①</sup>。这样的微分约束称为可积微分约束, 因为它和有限约束

$$f(t, r_\nu) = c \quad (5)$$

是等价的。这里  $c$  是任意常数。

注意, 在笛卡尔直角坐标中, 约束方程(1)–(4)可以写成如下形式:

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) = 0, \quad (1')$$

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0, \quad (2')$$

$$\sum_{\nu=1}^N (A_\nu \dot{x}_\nu + B_\nu \dot{y}_\nu + C_\nu \dot{z}_\nu) + D = 0^{②}, \quad (3')$$

① 若  $r_\nu = x_\nu i + y_\nu j + z_\nu k$ , 其中  $i, j, k$  是正交坐标轴的单位矢量, 则

$$\frac{\partial f}{\partial r_\nu} = \frac{\partial f}{\partial x_\nu} i + \frac{\partial f}{\partial y_\nu} j + \frac{\partial f}{\partial z_\nu} k \quad (\nu = 1, \dots, N).$$

②  $A_\nu, B_\nu, C_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) 都是  $t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$  的数量函数。



$$\sum_{v=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_v} \dot{x}_v + \frac{\partial f}{\partial y_v} \dot{y}_v + \frac{\partial f}{\partial z_v} \dot{z}_v \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (4')$$

在有限約束方程 (2) 或 (2') 中, 如果不明显地包含時間  $t$ , 即  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , 則这种約束称为平稳的。此时, 微分約束方程 (4) 的左端, 对速度而言, 是綫性齐次的。与此相仿, 如果方程 (3) 的  $D=0$ , 而且矢量  $L_v$  [相应地, (3') 的系数  $A_v, B_v, C_v$ ] 不明显地依赖于時間  $t$ , 則微分約束 (3) 或 (3') 称为平稳的。

如果沒有不可积微分約束加于质点系統的各点, 則这种系統称为完整系統。因此, 自由的质点系統以及具有有限約束或可积微分約束的非自由系統都是完整系統。完整系統所具有的一切約束都可以写成有限形式。

当有不可积微分約束存在时, 系統称为非完整系統①。

仅仅具有平稳約束的系統称为平稳系統。有非平稳約束的系統称为非平稳系統。

**例題 1.** 质点只可以沿着曲面运动, 曲面方程为

$$f(\mathbf{r}) = 0 \quad (6)$$

$$\text{或} \quad f(x, y, z) = 0. \quad (6')$$

这是有限的平稳約束。

如果曲面本身在运动或变形, 那么, 在曲面方程中将显含時間  $t$ :

$$f(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (7)$$

或

$$f(t, x, y, z) = 0. \quad (7')$$

在这种情况下, 約束是有限的但非平稳的。

2. 由长度为  $l$  的剛性杆联結着的二质点。在这种情况下, 約束方程为

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - l^2 = 0 \quad (8)$$

---

① 不可积微分約束往往又称为非完整約束, 而可积微分約束有时又称为半完整約束。

或

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0. \quad (8')$$

这是完整的平稳系统。

应当注意，刚体可以看作质点间距离不变的系统，即具有形式(8)的约束。从这种观点出发，自由刚体乃是自由的、完整的平稳质点系统的特殊情况。

3. 由变长度  $l=f(t)$  的杆联结着的二质点。约束方程可以写作：

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - f^2(t) = 0 \quad (9)$$

或

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - f^2(t) = 0. \quad (9')$$

这是完整的非平稳系统。

4. 平面上二质点由一长度为  $l$  的刚性杆联结，运动中杆的中点速度只可以沿着杆向(冰刀在平面上的运动)。约束方程可以写成如下的形式：

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 0, \quad z_2 = 0, \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 &= 0, \\ \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} &= \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

这是非完整系统，因为(10)中最后一个方程决定一个不可积的微分约束。

形式如(1)的约束称为固执约束。在力学中还会遇到一种非固执约束，它可以用如下形式的不等式来表示：

$$f(t, \mathbf{r}_v, \dot{\mathbf{r}}_v) \geq 0. \quad (11)$$

例如由长度为  $l$  的线所联结的二质点。这时的约束可以用下列不等式来表示：

$$l^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \geq 0. \quad (12)$$

在方程(11)中，如果等号成立，我们就说约束是张紧的。

当有非固执约束存在时，系统的运动可以分段考虑：在约束是张紧的一段上，系统的运动和在固执约束情况下一样，而在约束是非张紧的一段上，则和没有约束的情况一样。因此，在各个阶段上，非固执约束或者可代之以固执约束，或者可以完全解除。有鉴于此，今后我们将仅讨论固执约束。



## § 2. 可能位移和虛位移 · 理想約束

設在质点系統上加有  $d$  个有限約束

$$f_{\alpha}(t, \mathbf{r}_v) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d) \quad (1)$$

和  $g$  个微分約束<sup>①</sup>

$$\sum_{v=1}^N l_{\beta v} \mathbf{v}_v + D_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, g). \quad (2)$$

現在將有限約束代之以其微分形式

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_v} \mathbf{v}_v + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d). \quad (3)$$

若矢量組  $\mathbf{v}_v$  滿足  $d+g$  个綫性方程(2)和(3), 則矢量組  $\mathbf{v}_v$  称为瞬时  $t$  系統在其可能位置的可能速度。

因此, 可能速度是約束所容許的速度。对于系統在时刻  $t$  的每一可能位置, 都存在无数組可能速度, 而系統在时刻  $t$  作实际运动时, 这无数組速度中仅有一組被实现。

我們將无限小位移

$$d\mathbf{r}_v = \mathbf{v}_v dt \quad (v = 1, \dots, N) \quad (4)$$

叫做可能的无限小位移或簡称为可能位移, 其中  $\mathbf{v}_v$  ( $v = 1, \dots, N$ ) 是可能速度。將方程(2)和(3)逐項乘以  $dt$  就得到決定可能位移的方程:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{v=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_v} d\mathbf{r}_v + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d), \\ \sum_{v=1}^N l_{\beta v} d\mathbf{r}_v + D_{\beta} dt &= 0 \quad (\beta = 1, \dots, g). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

取系統在同一时刻、同一位置的两組可能位移

① 在微分約束方程中, 我們將  $\dot{\mathbf{r}}_v$  写成  $\mathbf{v}_v$ 。

$$d\mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu dt, \quad d'\mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}'_\nu dt \quad (\nu = 1, \dots, N).$$

$d\mathbf{r}_\nu$  和  $d'\mathbf{r}_\nu$  同样都满足方程(5), 但差

$$\delta\mathbf{r}_\nu = d'\mathbf{r}_\nu - d\mathbf{r}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (6)$$

却满足齐次关系式:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \delta\mathbf{r}_\nu &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d), \\ \sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \delta\mathbf{r}_\nu &= 0 \quad (\beta = 1, \dots, g). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

差  $\delta\mathbf{r}_\nu = d'\mathbf{r}_\nu - d\mathbf{r}_\nu$  称为虚位移。满足方程(7)的任意一组矢量  $\delta\mathbf{r}_\nu$  都是一组虚位移。关于虚位移的方程(7)和确定可能位移的方程(5)之间的差别仅在于方程(7)没有  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$  及  $D_\beta dt$  两项。因此可以说, 当约束被“凝固”时, 虚位移与可能位移是一样的。

事实上, 当约束被“凝固”时, 出现在有限约束中的时间  $t$  就被固定了, 也就是说, 约束将保持它在时刻  $t$  的形状不变。因此, 在求函数  $f_\alpha$  的微分时就不出现  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$  这一项, 因之, (5)式的头  $d$  个方程就和(7)式中的头  $d$  个一样。对于微分约束而言, “凝固”就意味着使之具有平稳的特征, 即丢掉约束方程左端中的  $D_\beta$  并使显含在系数  $l_{\beta\nu}$  中的  $t$  固定不变。这样一来, 方程(5)中的后  $g$  个方程就和(7)中对应的方程完全相同。

我们也可以这样说: 虚位移乃是系统各质点从系统在时刻  $t$  的某一可能位置到系统在同一时刻  $t$  可能占有的另一无限临近位置的位移。

在平稳约束情况下, 虚位移与可能位移一致。

**例题 1.** 点沿固定曲面运动(图 1)。

在这种情况下, 从点  $P$  所引出的、在该点与曲面相切的任一矢量  $\mathbf{v}$  都是可能速度。对应的可能位移  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$  则位于曲面在点  $P$  的切平面内。二切



綫矢量之差  $\delta \mathbf{r} = d' \mathbf{r} - d \mathbf{r}$  也是与曲面在同一点相切的矢量。因此, 由点  $P$  所作的位于切平面内的任何矢量既可以看作是某一个  $d \mathbf{r}$  也可以看作是某一个  $\delta \mathbf{r}$ 。在这个例子中, 约束是平稳的, 因之, 虚位移和可能位移一致。

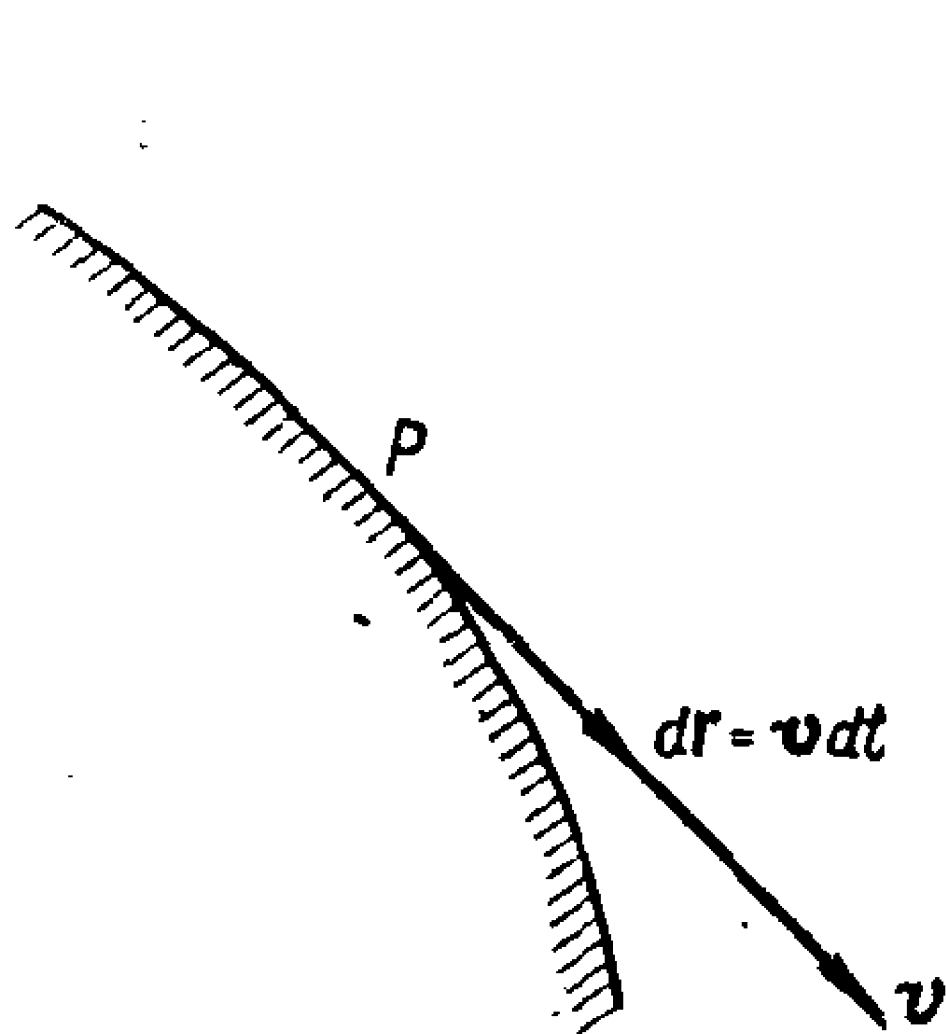


图 1.

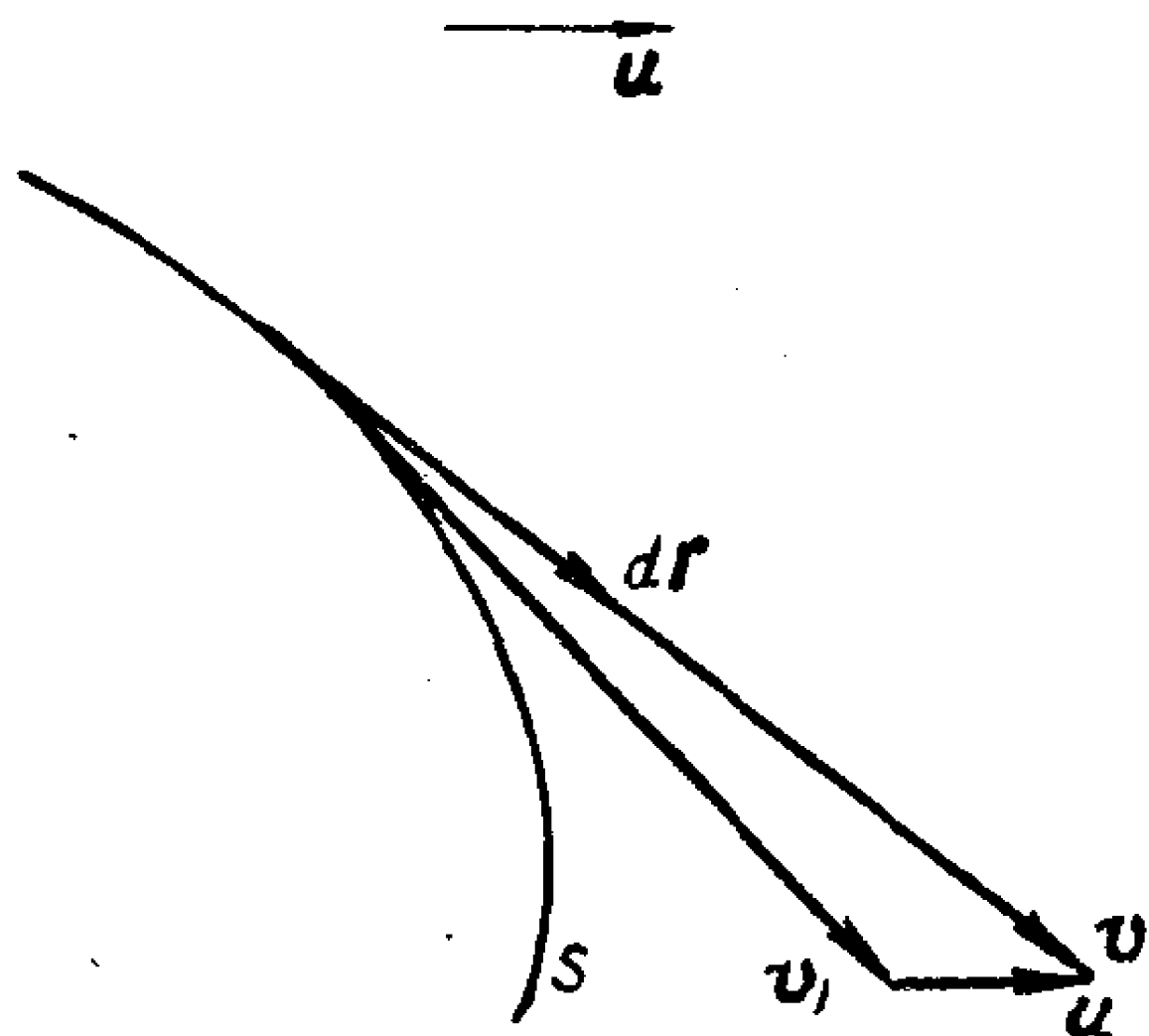


图 2.

2. 作为约束的曲面  $S$  以速度  $\mathbf{u}$  相对于原来坐标系(像刚体一样地)运动(图 2)。

此时, 可能速度  $\mathbf{v}$  可由与曲面相切的任一矢量  $\mathbf{v}_1$  同曲面自身的速度  $\mathbf{u}$  之和得出:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}.$$

因此,

$$d \mathbf{r} = \mathbf{v} dt = \mathbf{v}_1 dt + \mathbf{u} dt.$$

与此相仿, 对于另一个可能位移则有

$$d' \mathbf{r} = \mathbf{v}'_1 dt + \mathbf{u} dt.$$

因而, 虚位移

$$\delta \mathbf{r} = d' \mathbf{r} - d \mathbf{r} = (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1) dt$$

和  $d \mathbf{r}$  不同, 它是位于过  $P$  点的切平面上的矢量(图 3)。矢量  $\delta \mathbf{r}$  是当曲面  $S$  不动时的可能位移。

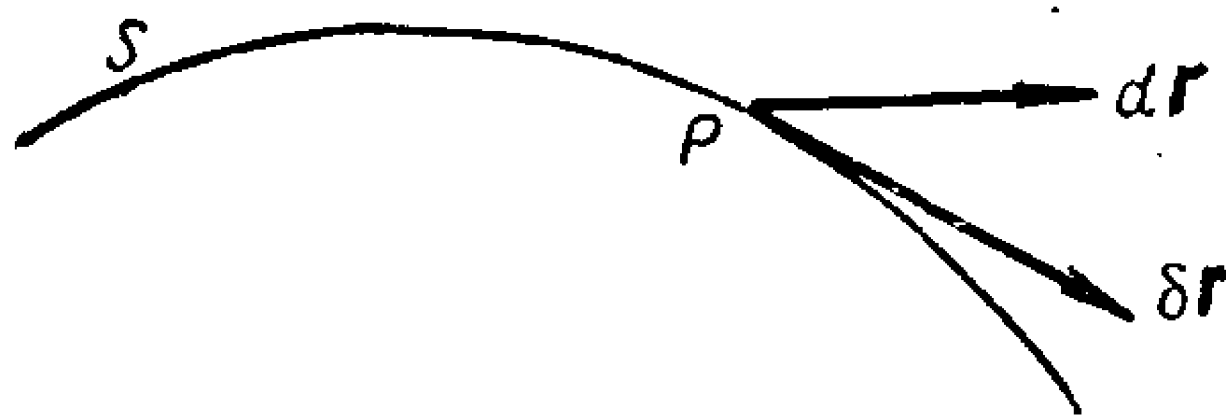


图 3.

在笛卡尔坐标中,  $\delta \mathbf{r}_v$  可用它沿坐标轴的三个投影  $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$  ( $v=1, \dots, N$ ) 来表示, 因而, 确定虚位移的方程(7)可以写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{v=1}^N \left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_v} \delta x_v + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_v} \delta y_v + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_v} \delta z_v \right) &= 0 \quad (\alpha=1, \dots, d), \\ \sum_{v=1}^N (A_{\beta v} \delta x_v + B_{\beta v} \delta y_v + C_{\beta v} \delta z_v) &= 0 \quad (\beta=1, \dots, g). \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

如果这  $d+g$  个方程是独立的, 则  $3N$  个坐标虚增量  $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$  中将有  $n=3N-d-g$  个是独立的。数  $n$  称为质点系统的自由度。

设在系统各质点  $P_v$  上分别作用有力  $F_v (\nu=1, \dots, N)$  ①。如果没有约束, 则按牛顿第二定律, 质量  $m_v$ 、加速度  $w_v$  和力  $F_v$  之间有  $m_v w_v = F_v (\nu=1, \dots, N)$  的关系。在有约束存在的情况下, 加速度  $w_v = \frac{1}{m_v} F_v$  (在给定的时刻  $t$  和系统各质点的给定位置  $r_v$  和速度  $v_v$  之下) 可能和约束不一致。事实上, 将等式 (3) 和 (2) 对时间逐项微分便得到约束加在系统各质点加速度  $w_v$  上的限制的解析表达式②:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{v=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r_v} w_v + \sum_{v=1}^N \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r_v} \right) v_v + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} &= 0 \quad (\alpha=1, \dots, d), \\ \sum_{v=1}^N l_{\beta v} w_v + \sum_{v=1}^N \frac{dl_{\beta v}}{dt} v_v + \frac{dD_{\beta}}{dt} &= 0 \quad (\beta=1, \dots, g). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

加速度  $w_v = \frac{1}{m_v} F_v$  可能不满足这些关系。因此, 实际存在的约束将在系统的质点  $P_v$  上作用以附加的力  $R_v (\nu=1, \dots, N)$ ; 这些由约束产生的作用力称之为约束反力③。所产生的反力应当使由

①  $F_v$  应理解为直接作用在质点  $P_v$  上的一切力的合力 ( $\nu=1, \dots, N$ )。

② (8) 式左端线性地依赖于加速度  $w_v$ 。不难看出, 这些左端部分在微分之后仍然依赖于  $t, r_v, v_v (\nu=1, \dots, N)$ 。

③ 当有若干个约束存在 ( $d+g>1$ ) 时,  $R_v$  就是作用在点  $P_v$  上的全体约束反力的合力 ( $\nu=1, \dots, N$ )。



方程

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (9)$$

所确定的加速度为約束所容許。

为了和反力  $\mathbf{R}_\nu (\nu = 1, \dots, N)$  相区别, 我們將預先給定的力  $\mathbf{F}_\nu (\nu = 1, \dots, N)$  称为主动力。主动力通常是時間和系統各质点位置 and 速度的已知函数<sup>①</sup>。

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu) \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (10)$$

非自由系統动力学的基本問題如下:

設主动力  $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu)$  是已知的, 系統各质点的一組为約束所容許的初始位置  $\mathbf{r}_\nu^0$  和初始速度  $\mathbf{v}_\nu^0$  也是已知的 ( $\nu = 1, \dots, N$ )。求系統的运动和約束反力  $\mathbf{R}_\nu (\nu = 1, \dots, N)$ <sup>②</sup>。

如果除方程(1)、(2)而外, 关于約束的特征一无所知, 因而, 关于这些約束所产生的反力  $\mathbf{R}_\nu$  我們也就一无所知, 則前述問題将无法确定。因为在这种情况下, 需要确定的未知数  $x_\nu, y_\nu, z_\nu, R_{\nu x}, R_{\nu y}, R_{\nu z}$  多于現有的方程  $m_\nu \ddot{x}_\nu = F_{\nu x} + R_{\nu x}, m_\nu \ddot{y}_\nu = F_{\nu y} + R_{\nu y}, m_\nu \ddot{z}_\nu = F_{\nu z} + R_{\nu z}$  和約束方程(1)、(2) ( $6N > 3N + d + g$ )。

为使动力学基本問題成为能够确定的, 对未知量就还需要有  $6N - (3N + d + g) = 3N - d - g = n$  个补充的独立关系式。若仅限于討論理想約束这一重要类型, 这些关系式是可以得到的。

若約束反力在任何虛位移上所作功的总和等于零, 即

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0, \quad (11)$$

則这种約束就称为理想約束。式(11)还可以写成如下的展开形式:

$$\sum_{\nu=1}^N (R_{\nu x} \delta x_\nu + R_{\nu y} \delta y_\nu + R_{\nu z} \delta z_\nu) = 0. \quad (11')$$

① 在一般情况下, (10)式右端除  $t$  而外还依赖于所有的  $\mathbf{r}_\mu$  和  $\mathbf{v}_\mu (\mu = 1, \dots, N)$ 。

② 对于自由系統, 无需确定反力而仅需确定系統的运动。

在  $3N$  个量  $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$  中有  $n$  个是独立的 ( $n=3N-d-g$  是系统的自由度数)。因此, 在 (11') 式中可以将  $3N-n$  个不独立的增量  $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$  通过  $n$  个独立的增量表出。令这些独立增量的系数等于零, 就得到所短少的  $n$  个关系式。有了这些关系式非自由系统的动力学基本问题就成为确定的了。

在讨论了下面几个理想约束的例子之后, 就可以看出引入理想约束的必然性及其在实践上的重要性是很显然的。

**例题 1.** 质点沿固定光滑曲面运动 (图 4)。

在这种情况下, 任何可能位移  $d\mathbf{r}$  和任何虚位移  $\delta\mathbf{r}$  都位于曲面过  $P$  点的切平面上, 而光滑曲面的反力则沿曲面过  $P$  点的法线方向; 因此, 恒有

$$Rd\mathbf{r}=0 \text{ 或 } R\delta\mathbf{r}=0.$$

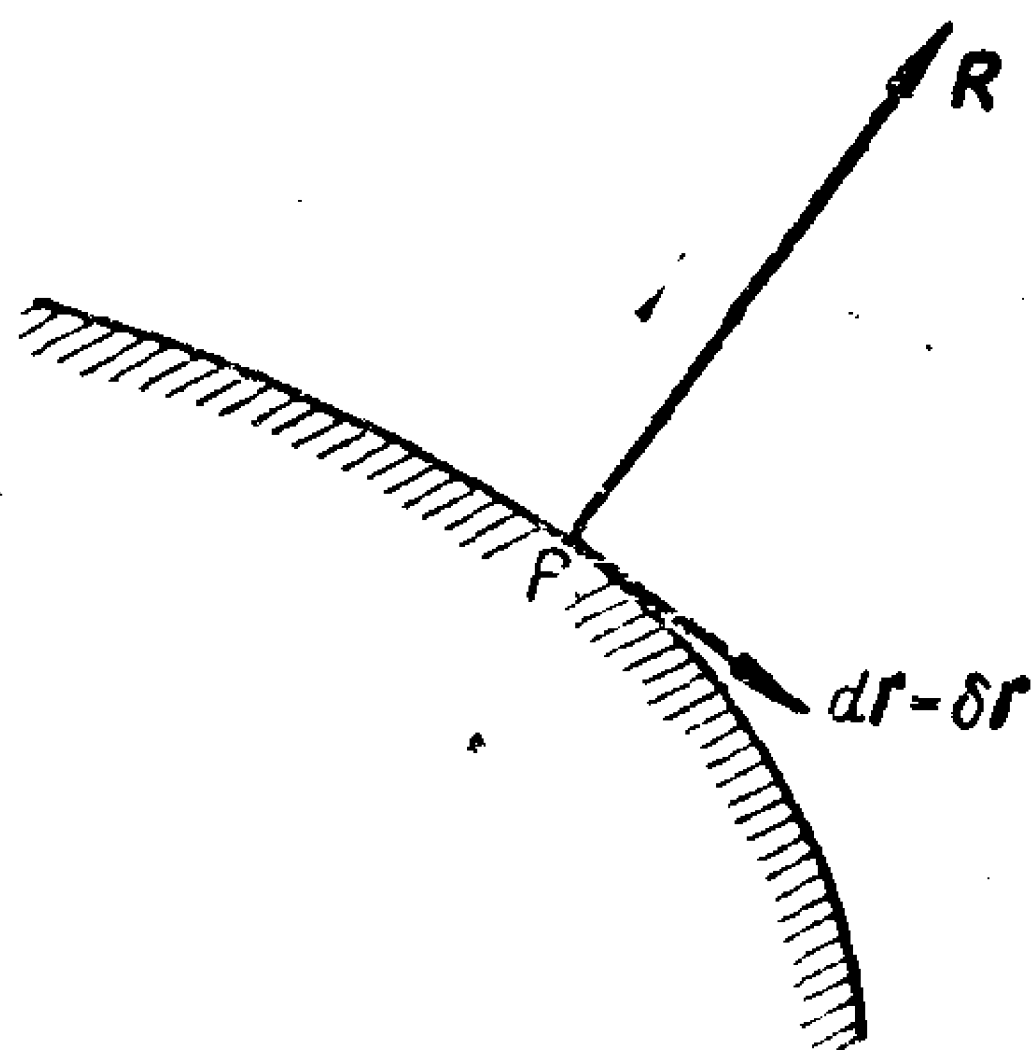


图 4.

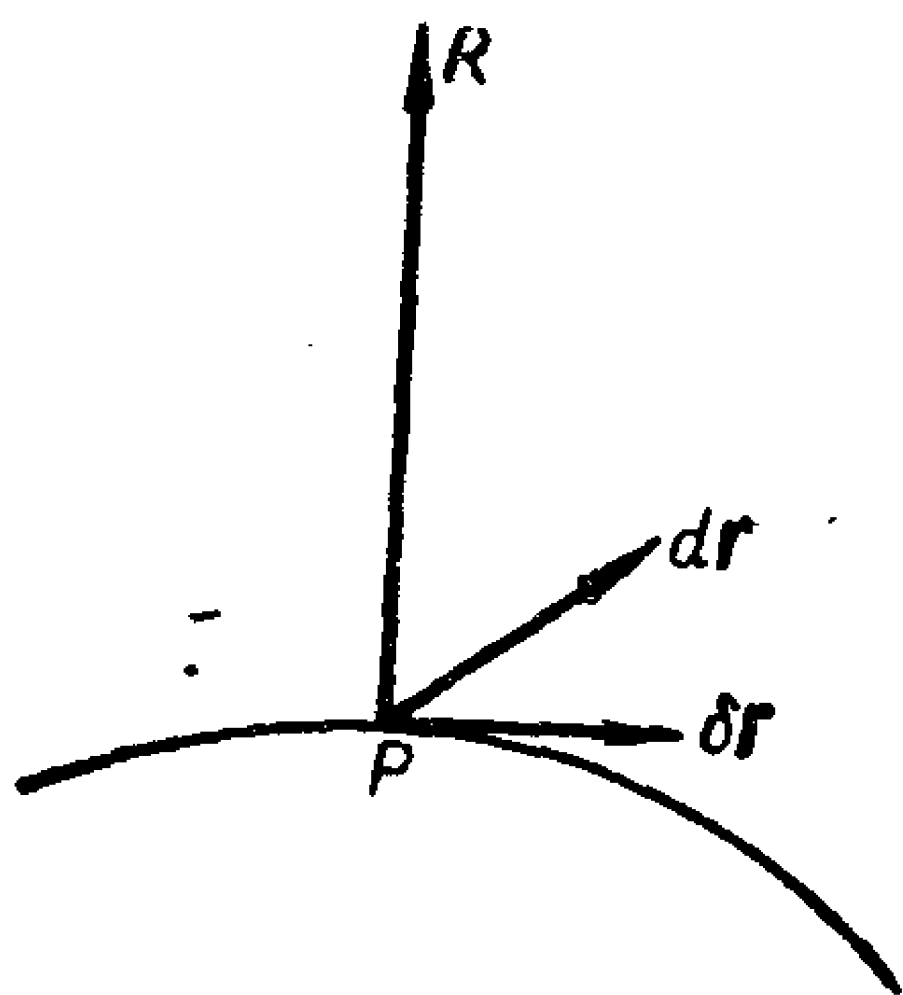


图 5.

2. 质点沿运动着的或形状变化着的光滑曲面运动 (图 5)。

在这种情况下, 质点的可能速度不再位于切平面上, 因而无限小位移  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$  也不在切平面上 (见第 7 页例 2)。但虚位移  $\delta\mathbf{r}$  乃是当曲面“被阻止不动”或“被凝固不变”时的可能位移, 因而仍在切平面内。又由于光滑曲面在运动和变形的情况下反力还是沿曲面的法线方向, 所以  $R\delta\mathbf{r}=0$  (但  $Rd\mathbf{r}\neq 0$ )。

因此, 光滑曲面, 无论它是固定的, 还是运动的, 还是变形的, 都是理想约束。

例 2 很清楚地说明了在定义非平稳的理想约束时, 为什么必



須用反力在任意虛位移上之功为零，而不是在可能位移上之功为零。

在以下的几个例子中，我們遇到的都只是平穩約束①。

3. 二质点由长度不变的杆子相互联結，杆子的质量小得可以略去不計 (图 6)。

以  $R_1$  和  $R_2$  表示作用在质点  $P_1$  和  $P_2$  上的約束反力。于是，根据牛頓第三定律，作用在杆上的力  $N_1 = -R_1$ ,  $N_2 = -R_2$ 。以  $m$  表示杆子的质量， $w$  表示杆子慣性中心的加速度， $I$  和  $\varepsilon$  分別表示杆子的中心轉动慣量和角加速度，則

$$mw = N_1 + N_2, \quad I\varepsilon = L,$$

式中  $L$  是力  $N_1$  和  $N_2$  对慣性中心的力矩之和。但是，根据条件， $m=0$ ,  $I=0$ 。所以  $N_1 +$

$N_2 = 0$ ,  $L = 0$ ②。由这些等式可以得知：力  $N_1$  和  $N_2$  亦即  $R_1$  和  $R_2$  沿杆向，方向相反。

其次，由于

$$R_1 \delta r_1 + R_2 \delta r_2 = R_1 dr_1 + R_2 dr_2 = R_2 (dr_2 - dr_1) = R_2 d(r_2 - r_1),$$

因而，当令  $R_2 = c(r_2 - r_1)$  时，便有

$$R_1 \delta r_1 + R_2 \delta r_2 = c(r_2 - r_1) d(r_2 - r_1) = \frac{c}{2} d(r_2 - r_1)^2 = 0,$$

因为  $(r_2 - r_1)^2 = \text{const.}$

絕對剛体可以看作任意两点間都作用有上述形式約束的质点系統。因此，可以认为剛体是具有理想約束的质点系統。如果剛体上除了使其各点間距离保持不变的約束而外，別无其它約束，則此剛体称为自由剛体。

4. 两个剛体用鉸鏈联結于点 A (图 7)。略去鉸鏈的质量和大小不計，即可看出(如前例所述)  $R_1 + R_2 = 0$ ，因而

$$R_1 \delta r + R_2 \delta r = (R_1 + R_2) \delta r = 0.$$

① 从理想約束的定义可知，若将非平穩約束在各个不同时刻的形态固定下来看作平穩約束时，这些平穩約束全是理想約束，則此非平穩約束是理想約束。

② 如果杆不是作平面运动，則数量等式  $I\varepsilon = L$  应代之以矢量等式  $\frac{d}{dt}(\hat{I}\omega) = L$ ，式中  $\hat{I}$  是慣量張量， $\omega$  是角速度。由等式  $\hat{I} = 0$  仍然得到  $L = 0$ 。

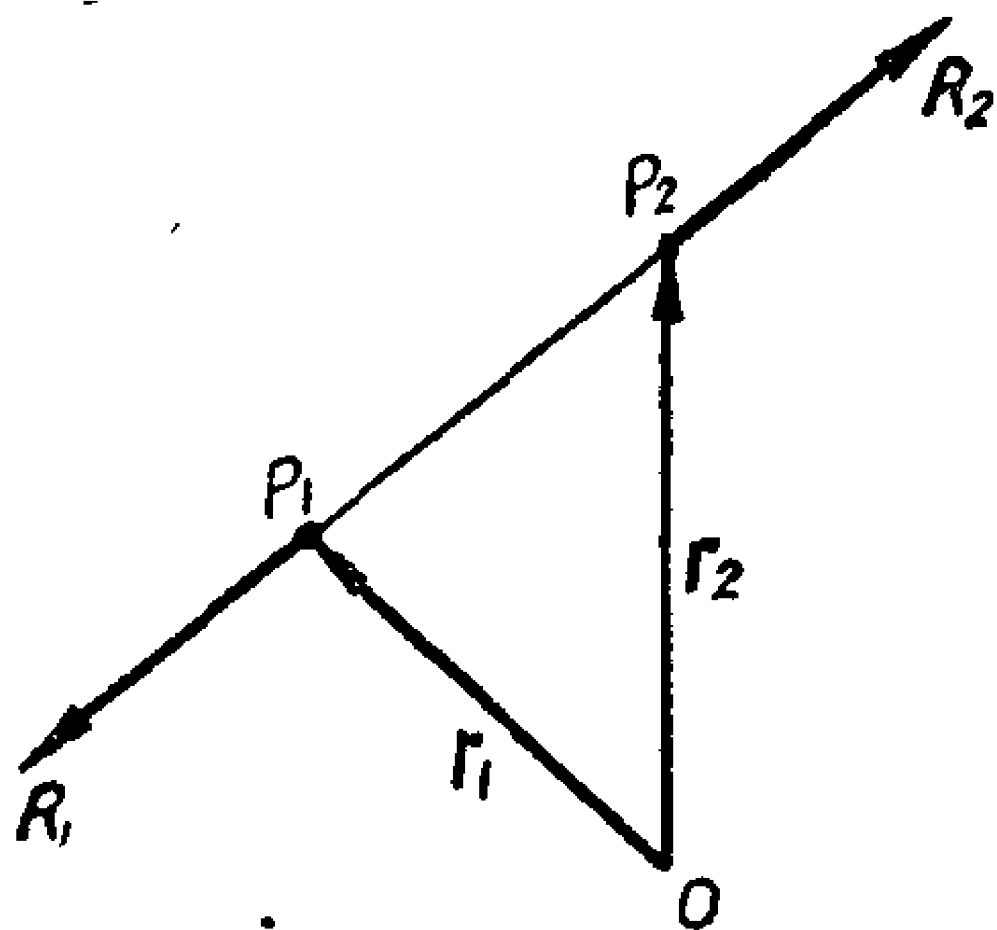


图 6.

5. 二刚体在运动中以理想光滑表面(潤滑很好的表面)相接触(图 8)。在这种情况下仍有  $R_1 + R_2 = 0$ , 而且  $R_1$  和  $R_2$  都沿曲面的公共法线。另外, 由于两个物体接触处的相对速度  $v_2 - v_1$  位于公切面内, 因而可能位移之差  $dr_2 - dr_1 = (v_2 - v_1)dt$  也位于公切面内, 故

$$R_1 \delta r_1 + R_2 \delta r_2 = R_1 dr_1 + R_2 dr_2 = R_2 (dr_2 - dr_1) = 0.$$

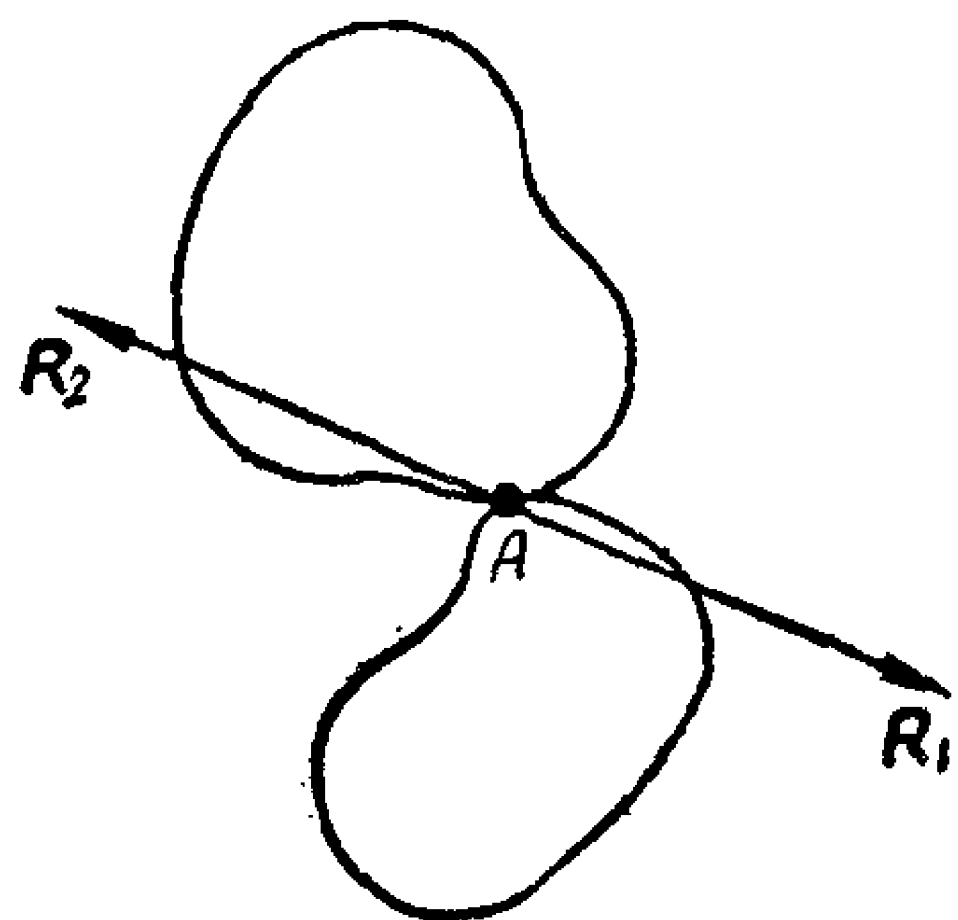


图 7.

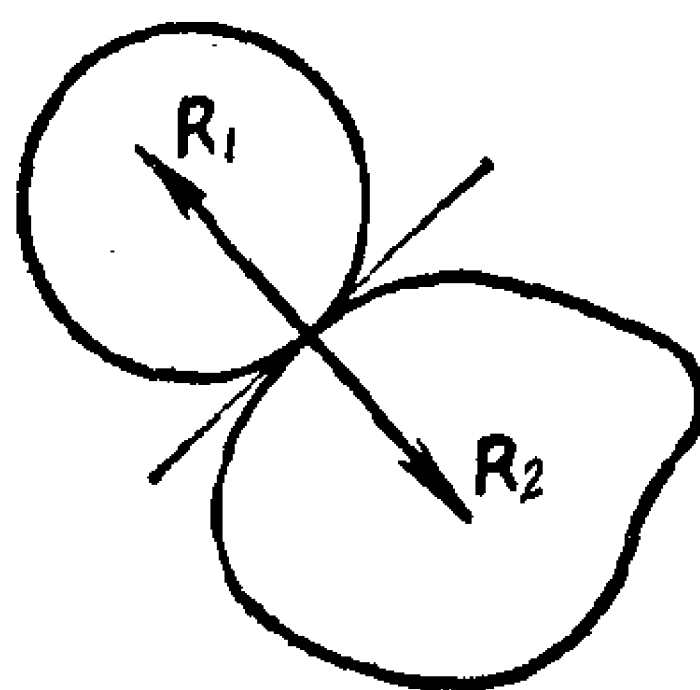


图 8.

6. 两个刚体在运动中以完全粗糙表面相接触(“齿的啮合”)。在这种情况下, 相对滑动速度等于  $v_2 - v_1 = 0$ , 因而,  $dr_2 - dr_1 = (v_2 - v_1)dt = 0$ , 所以

$$R_1 \delta r_1 + R_2 \delta r_2 = R_2 (dr_2 - dr_1) = 0.$$

复杂机构可以看作刚体系统, 其中刚体两两之间或刚性联结, 或以铰链联结, 或以其表面相互接触。如果认为所有刚性联结是绝对刚性的, 铰链是理想的, 而所有接触面或者是理想光滑的或者是完全粗糙的, 则任一复杂机构均可看作具有理想约束的质点系统。

不过, 应该注意的是: 在许多情况下, 这样的理想化是不允许的。例如, 略去摩擦力有时就会使现象的物理性状遭到严重的歪曲。在这种情况下, 就必须放弃理想约束的条件代之以由约束特征和摩擦定律导出的条件。

这种情况也可以按另一种方式处理: 只考虑非光滑面反作用力的法向分量, 同时将摩擦力看作未知主动力, 则约束仍然可以认为是理想的。由于新未知量—摩擦力的出现而短少的方程可由

摩擦的实验定律来补充。

对理想约束的概念作了这样的一些解释之后，这个概念在实际上就能够普遍适用了。

往后我们永远假定加在系统上的一切约束都是理想的。

### § 3. 动力学普遍方程 · 第一类拉格朗日方程

对于非自由质点系统，下列方程成立：

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N), \quad (1)$$

式中  $m_\nu$  是第  $\nu$  个质点的质量， $\mathbf{w}_\nu$  是它的加速度，而  $\mathbf{F}_\nu$  和  $\mathbf{R}_\nu$  分别是作用在这个质点上的主动力的合力和反力的合力 ( $\nu = 1, \dots, N$ )。由于约束是理想的，所以，在系统的任一位置，对于任何虚位移都有

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \quad (2)$$

由方程(1)解出  $\mathbf{R}_\nu$ ，代入上式，并于所得等式的两侧同乘以  $-1$ ，即得：

$$\sum_{\nu=1}^N (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \quad (3)$$

等式(3)称为动力学普遍方程。这个等式表明：在系统运动的任一时刻，主动力和惯性力在任何虚位移上所作之功之和为零。

因此，与已知主动力  $\mathbf{F}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) 相适应的、为约束所容许的任何运动恒满足动力学普遍方程。

反之，假设给定了系统的某一为约束所容许的运动，它满足动力学普遍方程(3)。于是，当令  $\mathbf{R}_\nu = m_\nu \mathbf{w}_\nu - \mathbf{F}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) 时，等式(1)和(2)成立。因此在任何时刻都可以选取这样的约束反力  $\mathbf{R}_\nu$ ，按等式(2)，它是为给定约束所容许的，而且在这样的反力之下，由牛顿第二定律所得到的方程(1)成立。我们认为实际出现的



就是这些反力  $R_\nu$  (“容许反力可实现性假设”), 因之, 给定的运动和给定的主动力  $F_\nu(t, r_\nu, v_\nu)$  ( $\nu=1, \dots, N$ ) 相适应。因此, 动力学普遍方程表示了为约束所容许的运动和给定的主动力系  $F_\nu$  ( $\nu=1, \dots, N$ ) 相适应的必要充分条件<sup>①</sup>。

我们用所谓的拉格朗日不定乘子来求反力  $R_\nu$  的表达式。为此先写出确定系统各点虚位移的关系式(见 § 2):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_\nu} \delta r_\nu = 0 \quad (\alpha=1, \dots, d), \quad (4)$$

$$\sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \delta r_\nu = 0 \quad (\beta=1, \dots, g). \quad (5)$$

将等式(4)、(5)分别乘以任意数量因子  $-\lambda_\alpha$  和  $-\mu_\beta$  并与等式(2)相加, 则得

$$\sum_{\nu=1}^N \left( R_\nu - \sum_{\alpha=1}^d \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_\nu} - \sum_{\beta=1}^g \mu_\beta l_{\beta\nu} \right) \delta r_\nu = 0. \quad (6)$$

上式可以写成如下的展开形式:

$$\sum_{\nu=1}^N \left( R_{\nu x} - \sum_{\alpha=1}^d \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_\nu} - \sum_{\beta=1}^g \mu_\beta A_{\beta\nu} \right) \delta r_\nu + \{y\}_\nu \delta y_\nu + \{z\}_\nu \delta z_\nu = 0. \quad (6')$$

其中  $\{y\}_\nu$  和  $\{z\}_\nu$  代表将  $\delta r_\nu$  的系数中的字母  $x$ 、 $A$  分别代之以  $y$ 、 $B$  和  $z$ 、 $C$  而得到的表达式。

由 § 2 关系式(7') 可将  $3N$  个虚增量  $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$  中的  $d+g$  个通过其余的  $n=3N-d-g$  个表出。此时由 § 2 方程(7') 中“不独立增量”的系数所构成的行列式  $J$  不等于零。

现在来选择  $d+g$  个乘数  $\lambda_\alpha$  和  $\mu_\beta$ , 使等式(6') 中的  $d+g$  个“不独立增量”的系数为零。这是可以作到的, 而且这些乘数可以唯一地被确定, 因为由待定量  $\lambda_\alpha$  和  $\mu_\beta$  的系数所组成的行列式等

① 不要忘记, 动力学普遍方程(3)实际上并非一个方程而是一组方程, 因为对于任何时刻  $t$  都可以用任意的虚位移来代替方程(3)中的  $\delta r_\nu$  ( $\nu=1, \dots, N$ )。

于  $J \neq 0$ 。确定了这些乘数之后, (6') 式中剩下的就只是包含独立增量  $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$  的各项了。而这些独立增量的系数也应当等于零。

換句話說, 适当地选择不定乘子  $\lambda_\alpha$  和  $\mu_\beta$  就可以使等式 (6') 中的全体数量系数, 亦即等式 (6) 中的全体矢量系数等于零。于是, 得到

$$R_v = \sum_{\alpha=1}^d \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_v} + \sum_{\beta=1}^g \mu_\beta l_{\beta v} \quad (v=1, \dots, N). \quad (7)$$

我們得到了以拉格朗日不定乘子  $\lambda_\alpha, \mu_\beta$  ( $\alpha=1, \dots, d; \beta=1, \dots, g$ ) 表示的关于理想約束的反力的一般公式。

將  $R_v$  的表达式 (7) 代入方程 (1), 就得到所謂第一类拉格朗日方程①:

$$m_v \mathbf{w}_v = \mathbf{F}_v + \sum_{\alpha=1}^d \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_v} + \sum_{\beta=1}^g \mu_\beta l_{\beta v} \quad (v=1, \dots, N). \quad (8)$$

在这些方程中, 还应当补充以約束方程:

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}_v) = 0^*, \quad \sum_{v=1}^N l_{\beta v} \dot{\mathbf{r}}_v + D_\beta = 0 \quad (\alpha=1, \dots, d; \beta=1, \dots, g). \quad (9)$$

每个矢量方程都可以用三个数量方程代替。方程 (8) 和 (9) 可以看作是關於  $3N + d + g$  个未知数  $x_v, y_v, z_v, \lambda_\alpha, \mu_\beta$  的  $3N + d + g$  个数量方程。对这些方程进行积分就得到有限形式的运动方程, 同时由方程 (7) 可以求出約束反力。但是, 由于方程个数多, 对于这些方程进行积分通常是很困难的, 因此, 第一类拉格朗日方程实际上很少被采用。

① 这些方程曾由法国数学家和力学家拉格朗日在其名著“分析力学”中提出。这部著作发表于 1788 年 (俄譯本第一卷于 1938 年出版, 第二卷于 1950 年出版)。它首次闡述了分析力学的基本理論。

\* 此处原作为  $f_\alpha(\mathbf{r}_v) = 0$ , 可能是笔誤, 为使前后一致, 譯者将其改为  $f_\alpha(t, \mathbf{r}_v) = 0$ 。

在 § 6 和 § 9 中我们将得到关于完整系统的第二类拉格朗日方程以及关于非完整系统的阿沛尔方程; 在这些方程中, 未知数的个数(因而也就是方程的个数)等于  $3N - d$ , 比方程组(8)和(9)少  $2d + g$  个。

例. 两个质量均为  $m=1$  的重质点  $M_1$  和  $M_2$ , 由一不变长度  $l$  的杆相联结, 杆的质量可以略去不计。设此质点系统仅能在铅垂平面里运动, 而且杆的中点速度必须沿杆子方向。求质点  $M_1$  和  $M_2$  的运动。

令质点  $M_1$  和  $M_2$  的坐标分别为  $x_1, y_1$  和  $x_2, y_2$ , 则约束方程可以写作

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2] &= 0, \\ (x_2 - x_1)(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) - (\dot{x}_2 + \dot{x}_1)(y_2 - y_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

带不定乘子  $\lambda$  和  $\mu$  的拉格朗日方程具有如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1), \\ \ddot{y}_1 &= -g - \lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1), \\ \ddot{y}_2 &= -g + \lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由方程(11)并考虑到(10)式的头一个方程即可求得  $\lambda$  和  $\mu$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -\frac{g}{l^2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{l^2}[(x_2 - x_1)\ddot{x}_1 + (y_2 - y_1)\ddot{y}_1], \\ \mu &= \frac{g}{l^2}(x_2 - x_1) - \frac{1}{l^2}[(y_2 - y_1)\ddot{x}_1 - (x_2 - x_1)\ddot{y}_1]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

注意, 如果在方程(11)中以  $-\lambda$  代  $\lambda$ , 以  $\ddot{x}_2, \ddot{y}_2$  代  $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1$  我们就可以得到方程(12), 因此, 由方程(12)确定  $\lambda$  和  $\mu$  时就得到

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{g}{l^2}(y_2 - y_1) + \frac{1}{l^2}[(x_2 - x_1)\ddot{x}_2 + (y_2 - y_1)\ddot{y}_2], \\ \mu &= \frac{g}{l^2}(x_2 - x_1) - \frac{1}{l^2}[(y_2 - y_1)\ddot{x}_2 - (x_2 - x_1)\ddot{y}_2]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

令公式(13)和(14)中关于  $\lambda$  和  $\mu$  的相应表达式彼此相等, 则稍经变换之后便得到

$$\left. \begin{aligned} (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)(y_2 - y_1) - (\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1)(x_2 - x_1) &= 0, \\ (\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1)(x_2 - x_1) + (\ddot{y}_2 + \ddot{y}_1)(y_2 - y_1) + 2g(y_2 - y_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

为简便计, 令



$$u = x_2 - x_1, \quad v = y_2 - y_1, \quad P = \dot{x}_1 + \dot{x}_2, \quad Q = \dot{y}_1 + \dot{y}_2, \quad (16)$$

则方程(10)和方程(15)可以写作

$$\left. \begin{aligned} u^2 + v^2 &= l^2, \\ \ddot{u}v - u\ddot{v} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$Pv - Qu = 0, \quad (18)$$

$$\dot{P}u + \dot{Q}v + 2gv = 0. \quad (19)$$

等式(17)表明在 $(u, v)$ 平面上坐标为 $u, v$ 的点沿以原点为中心以 $l$ 为半径的圆周运动, 且其加速度永远指向圆心。但这样的运动必然是等速的, 因此

$$u = l \cos \varphi, \quad v = l \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \alpha = \text{const}, \quad \varphi = \alpha t + \beta. \quad (20)$$

根据等式(18), 可设

$$P = \frac{f}{l}u, \quad Q = \frac{f}{l}v. \quad (21)$$

将上式代入等式(19)并考虑到等式(17)和(20)便得到

$$\dot{f} + \frac{2g}{l}v = 0, \quad \text{即 } \dot{f} = -2g \sin \varphi.$$

于是,

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{1}{\alpha} \dot{f} = -\frac{2g}{\alpha} \sin \varphi, \quad f = \frac{2g}{\alpha} \cos \varphi + 2\gamma.$$

因此, 根据等式(20)和(21)便有

$$P = 2\left(\gamma + \frac{g}{\alpha} \cos \varphi\right) \cos \varphi, \quad Q = 2\left(\gamma + \frac{g}{\alpha} \cos \varphi\right) \sin \varphi. \quad (22)$$

积分之, 即得:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= \int P dt = \frac{1}{\alpha} \int P d\varphi = \frac{2\gamma}{\alpha} \sin \varphi + \frac{g}{\alpha^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{\alpha^2} \varphi + 2\delta, \\ y_1 + y_2 &= -\frac{2\gamma}{\alpha} \cos \varphi - \frac{g}{\alpha^2} \cos^2 \varphi + 2\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

由等式(16), (20)和(23)最后就得到

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\gamma}{\alpha} \sin \varphi + \frac{g}{2\alpha^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{2\alpha^2} \varphi - \frac{l}{2} \cos \varphi + \delta, \\ y_1 &= -\frac{\gamma}{\alpha} \cos \varphi - \frac{g}{2\alpha^2} \cos^2 \varphi - \frac{l}{2} \sin \varphi + \varepsilon, \\ x_2 &= \frac{\gamma}{\alpha} \sin \varphi + \frac{g}{2\alpha^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{2\alpha^2} \varphi + \frac{l}{2} \cos \varphi + \delta, \\ y_2 &= -\frac{\gamma}{\alpha} \cos \varphi - \frac{g}{2\alpha^2} \cos^2 \varphi + \frac{l}{2} \sin \varphi + \varepsilon, \\ \varphi &= \alpha t + \beta \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

( $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  都是任意常数)。

#### § 4. 虚位移原理 · 达朗伯原理

如果系统于初始时刻处于某位置且各点速度为零，而在其后的全部时间里恒处于此位置，则这个位置称为系统的平衡位置。

系统的位置  $\mathbf{r}_\nu^0$  ( $\nu=1, \dots, N$ ) 在而且仅在“运动”  $\mathbf{r}_\nu(t) \equiv \mathbf{r}_\nu^0$  ( $\nu=1, \dots, N$ ) 满足动力学普遍方程的情况下才是平衡位置，即在系统的这个位置上

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \quad (1)$$

等式(1)本身表出了虚位移原理。

系统的某一（符合约束的）位置是平衡位置的必要充分条件是：在此位置主动力在系统的任何虚位移上所作之功之和为零。

虚位移原理通常多用于平稳约束。如果约束是平稳的，则“符合约束”一词是指系统的位置满足有限约束。至于微分约束，由于它对于速度是线性齐次的，又因为我们假定了  $\mathbf{v}_\nu = 0$  ( $\nu=1, \dots, N$ )，所以对于平稳情况，它是自动满足的。

如果约束是非平稳的，则“符合约束”的意思是指对于任意的时间  $t$ ；当在约束方程中令  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu^0$  和  $\mathbf{v}_\nu = 0$  ( $\nu=1, \dots, N$ ) 时约束方程被满足。应该注意，在这种情况下， $t$  不同时，虚位移  $\delta \mathbf{r}_\nu$  ( $\nu=1, \dots, N$ ) 也可以不同。

在一般情况下，力  $\mathbf{F}_\nu$  有赖于  $t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu$  ( $\mu=1, \dots, N$ ):  $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu)$  ( $\nu=1, \dots, N$ )。此时，等式(1)指的是：当在  $\mathbf{F}_\nu$  的表达式中令全体  $\mathbf{r}_\mu = \mathbf{r}_\mu^0$ 、全体  $\mathbf{v}_\mu = 0$  时，它对于任意的时刻  $t$  都成立。

在最简单特殊情况下的虚位移原理（在用于平稳系统时往往又称为可能

位移原理)在伽利略时代即以“力学金律”之名为人所知<sup>①</sup>。

假设在无重量杠杆或滑轮(无摩擦)的两端有两个物体在力  $F_1$  和  $F_2$  的作用下处于平衡。以  $F'_1$  和  $F'_2$  记这两个力沿其可能轨迹的切线分量, 以  $\delta l_1$  和  $\delta l_2$  记相应的可能元位移, 则由等式(1), 考虑到符号, 便有

$$F'_1 \delta l_1 = F'_2 \delta l_2,$$

即

$$\frac{\delta l_1}{\delta l_2} = \frac{F'_2}{F'_1}$$

(得之于力失之于位移, 反之亦然, 此即“力学金律”)。

虚位移原理是分析静力学最普遍的原理。根据这一原理可以得到任何具体机械系统的平衡条件。

**例题 1.** 根据等式(1)来推导通常在力学教科书中用几何静力学方法得到的自由刚体平衡条件。以  $v_0$  表示刚体上任一点的速度,  $\omega$  表示角速度,  $F$  和  $L_0$  分别表示作用在刚体上的外力系对极点  $O$  的主矢量和主矩, 并令刚体上的作用力在刚体的任何无限小位移上的元功表达式<sup>②</sup>等于零:

$$\delta A = (Fv_0 + L_0\omega)dt = 0. \quad (2)$$

由矢量  $v_0$  和  $\omega$  的任意性可知, 当而且只有当

$$F = 0, \quad L_0 = 0 \quad (3)$$

时, 等式(2)才成立。等式(3)即自由刚体平衡的必要充分条件。

仿此可得非自由刚体的平衡条件。例如, 假设点  $O$  是固定的, 则  $v_0 = 0$ , 因而等式(2)变为  $\delta A = L_0\omega dt = 0$ 。于是, 由矢量  $\omega$  的任意性即得所需求的平衡条件:  $L_0 = 0$ 。

① 伽利略把“力学金律”的论证归功于亚里司多德。虚位移的一般表述首次见之于约翰·伯努利的著作(1717年)。

② 等式  $\delta A = (Fv_0 + L_0\omega)dt$  可以按如下方式得到: 以  $F_i$  表示作用在刚体各点的力,  $r_i$  和  $v_i$  分别表示力  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 作用点的矢径(由物体上  $O$  点所引出的)和速度, 并以符号  $\times$  表示矢量积, 于是, 便有

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_i F_i v_i dt = \sum_i F_i (v_0 + \omega \times r_i) dt = \\ &= \left[ \left( \sum_i F_i \right) v_0 + \omega \sum_i r_i \times F_i \right] dt. \end{aligned}$$

但是, 按牛顿第三定律, 刚体内力的主矢量和主矩是等于零的, 因此,

$$\sum_i F_i = F, \quad \sum_i r_i \times F_i = L_0.$$



如果刚体只能绕固定轴  $u$  (其单位矢量为  $e$ ) 转动, 则等式(2)变为  $\delta A = L_0 \omega e dt = 0$  的形式, 于是, 由  $\omega$  的任意性得平衡条件  $L_u = 0$ ; 这里  $L_u = L_0 e$  是外力对于轴  $u$  的主矩。

2. 求在重力作用下任意非自由刚体系统的平衡条件。以  $M$  表示全部物体的总质量, 以  $z_c$  表示刚体系统重心的铅直坐标 (假设  $z$  轴的方向铅直向下)。于是, 由等式(1)得

$$\delta A = Mg \delta z_c = 0,$$

因而系统的平衡条件具有如下形式:

$$\delta z_c = 0. \quad (4)$$

因此, 在重力作用下, 物体系统的平衡位置是: 重心最低的位置、重心最高的位置、重心铅直坐标取逗留值的其它任何位置 (“托里拆利原理”)。

3. 两端固定的均匀重链在平衡时的形状。将均匀重链看作刚体 (链环) 系统, 便可写出关系式(4)。以  $Oxz$  为铅直平面,  $z$  为铅直轴 (见图 9) 则

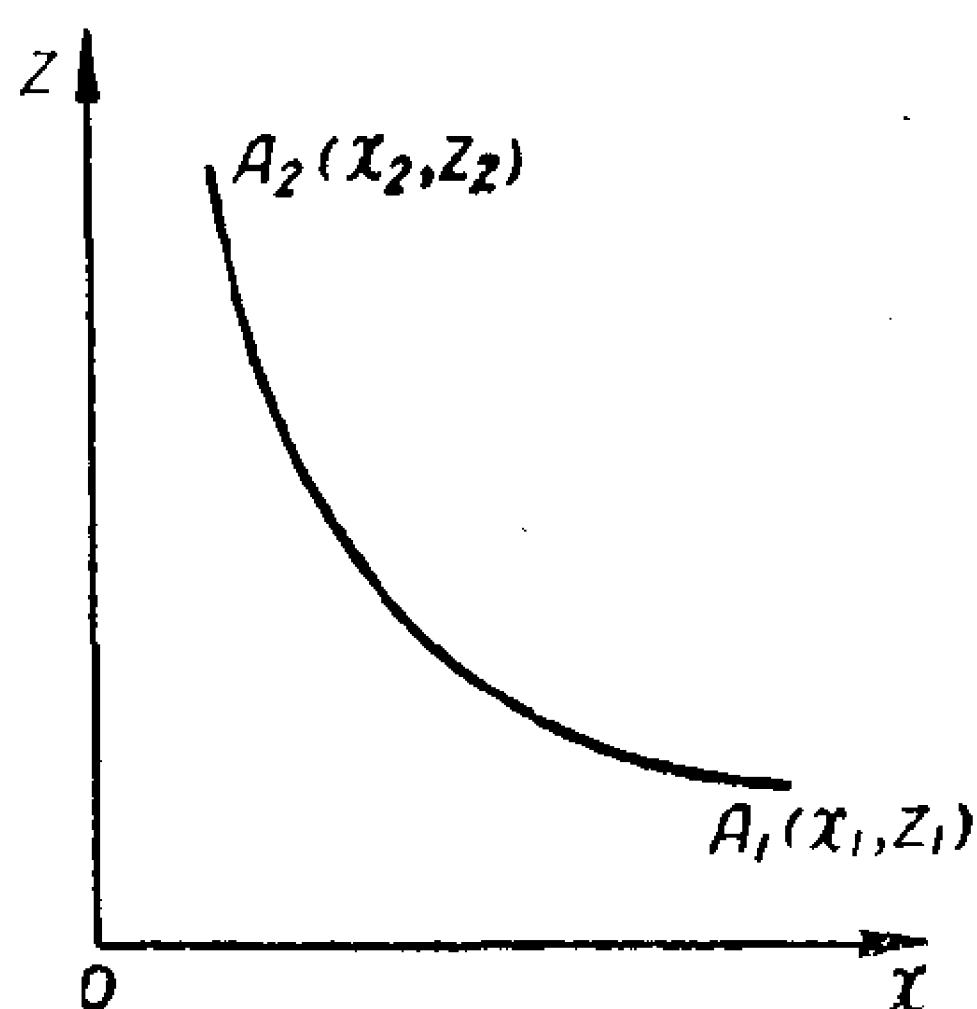


图 9.

$$z_c = \frac{\int z ds}{\int ds},$$

但由于在移动时链长不变, 所以条件(4)可以写成

$$\delta \int z ds = 0 \quad (5)$$

的形式。这个关系式还可以改写为:

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz = 0. \quad (5')$$

由变分学可知, 在通过已知两点的曲线类  $x = f(z)$  中, 使积分

$$\int_{z_1}^{z_2} F\left(z, x, \frac{dx}{dz}\right) dz$$

取极值 (严格地说应当是逗留值) 的曲线, 也就是使

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} F dz = 0$$

的曲线, 应当满足微分方程①

① 这个方程曾由欧拉得到。关于它的推导见第 85 页的脚注和第 87 页上的注。

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \left( x' = \frac{dx}{dz} \right). \quad (6)$$

在我們的討論中  $F = z \sqrt{1 + \left( \frac{dx}{dz} \right)^2}$ 。因此, 方程(6)有如下的形式:

$$\frac{d}{dz} \left[ z \frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{1 + \left( \frac{dx}{dz} \right)^2}} \right] = 0. \quad (7)$$

由此即得

$$z \frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{1 + \left( \frac{dx}{dz} \right)^2}} = c,$$

即

$$\frac{dx}{dz} = \frac{c}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad (8)$$

其中  $c$  是任意常数。將上式积分即得悬鏈綫方程:

$$z = \frac{c}{2} [e^{(x-\alpha)/c} + e^{-(x-\alpha)/c}], \quad (9)$$

式中任意常数  $c$  和  $\alpha$  由固定端条件来决定。因此, 均匀重鏈平衡时的形状为悬鏈綫①。

4. 不变的平面图形可以用其上二点  $A$  和  $B$  沿固定曲綫滑动, 而固定曲綫位于平面图形所在的平面內。我們來說明在怎样的力  $F$  作用下这图形才能处于平衡(图 10)。

因为作用在图形上的力, 除主动力  $F$  而外, 还有二个沿曲綫法綫方向的反力, 因此, 这三个力的作用綫應該相交于一点。換句話說, 力  $F$  的作用綫应当通过曲綫上  $A$ 、 $B$  两点法綫的交点, 即力  $F$  的作用綫應該通过图形的瞬时速度中心  $C$ ②。

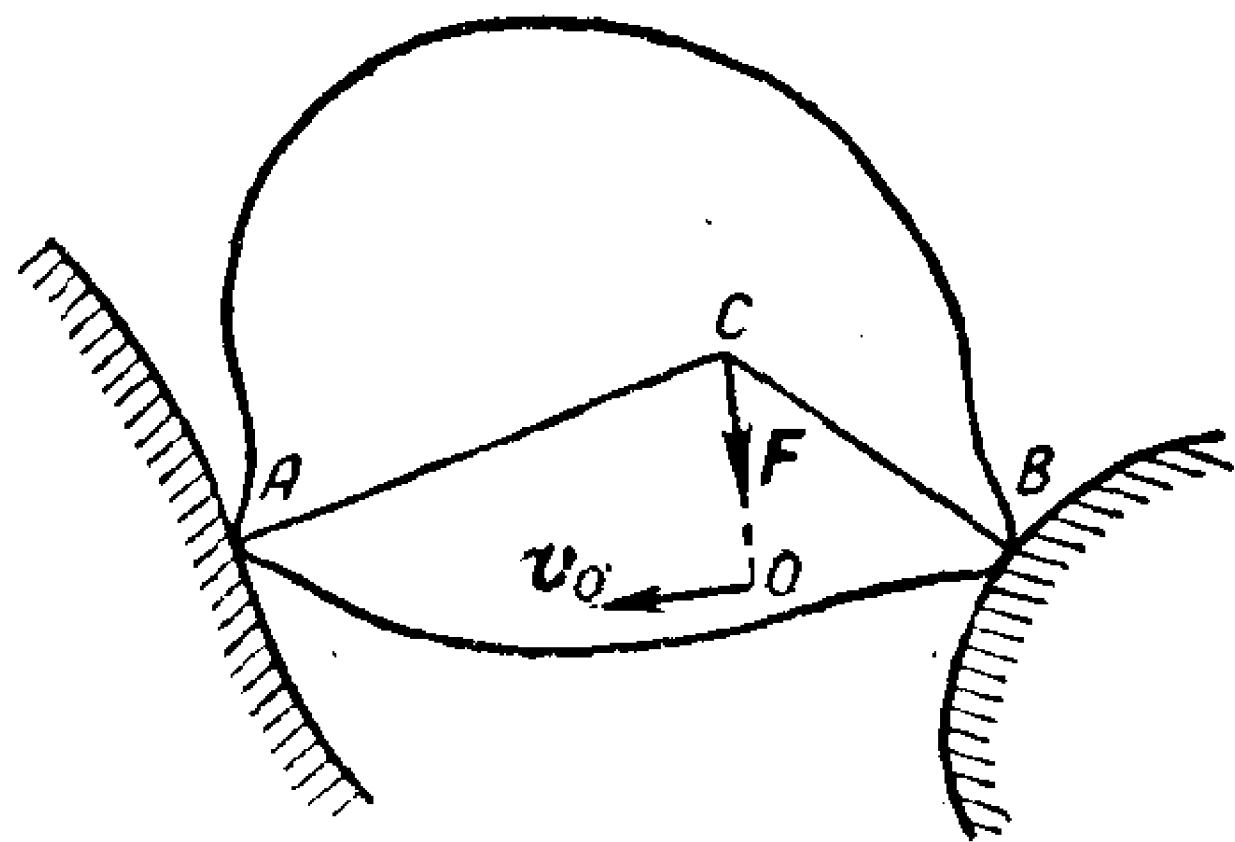


图 10.

① 伽利略曾經认为均匀重鏈平衡时的形状是拋物綫。伽利略的錯誤由惠更斯予以更正。

② 力  $F$  的大小和方向可以是任意的。

由可能位移原理也可以得到同样的结果。事实上,若以 $O$ 表示力 $F$ 作用线上的任意一点,则由条件 $\delta A = F v_o dt = 0$ 可知 $v_o \perp F$ ,因之,图形的瞬时速度中心位于力 $F$ 的作用线上。

5. 若干几何应用。我们从预备知识开始。假设在平面上给定了一条曲线 $C$ 和一点 $P$ (在特殊情况下,曲线 $C$ 可以退化为一个点)。由点 $P$ 作曲线 $C$ 的法线,并以 $r$ 记曲线 $C$ 沿其法线到点 $P$ 的距离,即 $r = P_0P$ (图 11)。今在 $P$ 点沿法线 $P_0P$ 作用一力 $F$ ;如果力 $F$ 的方向沿 $P_0$ 到 $P$ 的方向,我们就认为 $F > 0$ ,反之,就认为 $F < 0$ 。力 $F$ 的元功等于 $\delta A = F(dr_0 + dr)$ 。但 $dr$ 是两个元位移之和:一个是沿直线 $P_0P$ 的位移(这个位移的大小等于 $dr$ ),另一个则是由于直线 $P_0P$ 的转动而引起的 $P$ 点位移。后一个位移和 $dr_0$ 一样,都垂直于直线 $P_0P$ ,即垂直于力 $F$ 的作用线。因此①,

$$\delta A = F dr. \quad (10)$$

假设在同一平面上有 $n$ 条曲线 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 和一点 $P$ 。以 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 表示由点 $P$ (沿法线)到这些曲线②的距离(图 12 对应于 $n=2$ 的情况)。我们来看在同一平面上由方程③

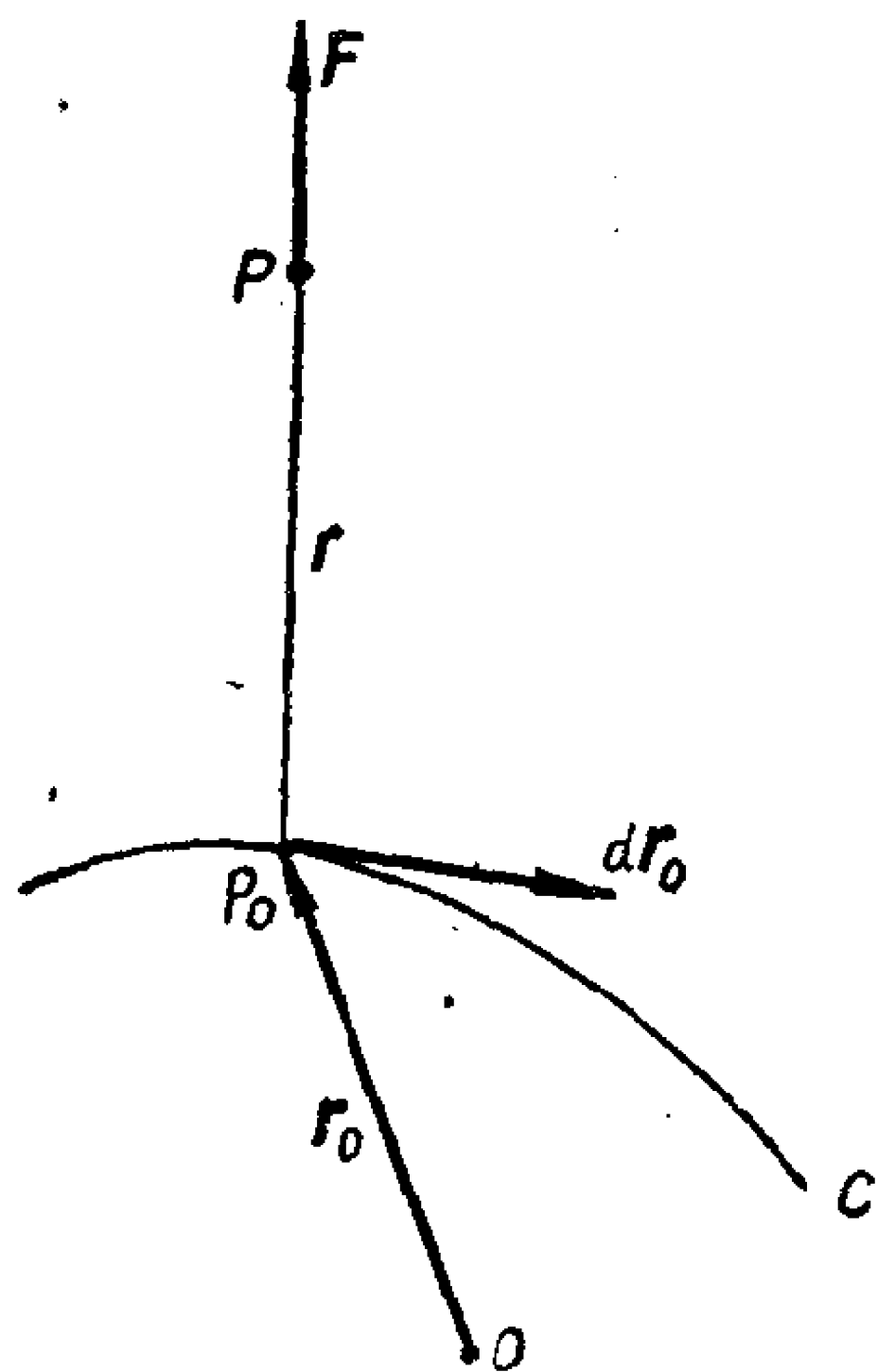


图 11.

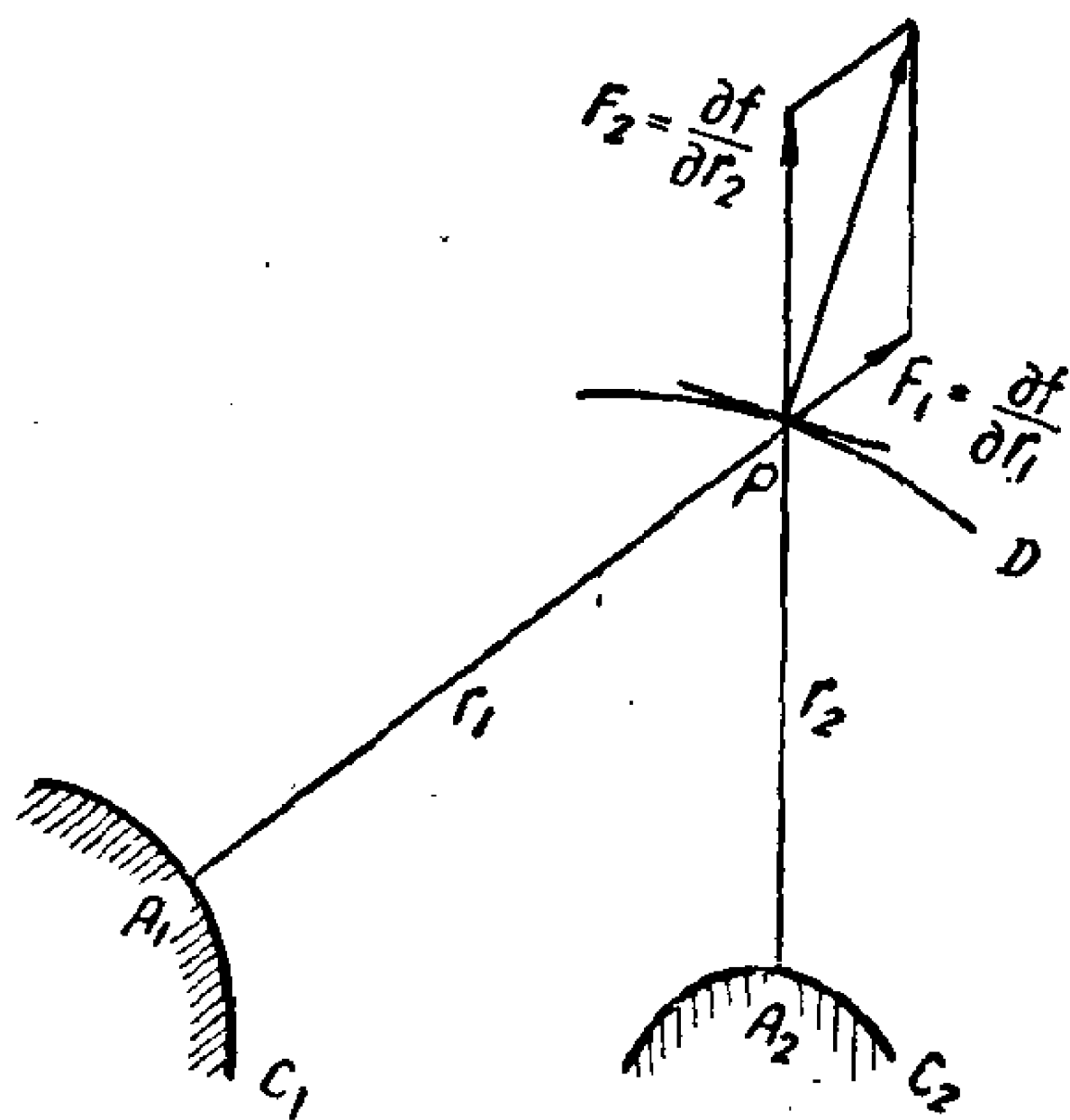


图 12.

① 当曲线 $C$ 退化为一点时,公式(10)就给出关于中心力之功的表达式。

② 曲线 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 中的某些条(或全部)可以退化为点。

③ 量 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 中的每一个都是点 $P$ 的两个笛卡尔坐标的函数,因此,方程(11)是一条平面曲线。



$$f(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0 \quad (11)$$

所确定的曲线  $D$ 。

我们来指出怎样根据方程(11)作曲线  $D$  上一点  $P$  的法线。

当点  $P$  沿曲线  $D$  作任何无限小位移时都有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i = 0. \quad (12)$$

现在在  $P$  点沿各个法线  $r_i$  分别作用一力  $F_i = \frac{\partial f}{\partial r_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ )。于是, 等式(12)便可以写作

$$\sum_{i=1}^n F_i dr_i = 0.$$

根据前面的预备知识, 这就表示当点  $P$  沿曲线  $D$  作任意位移时, 力  $F_1, F_2, \dots, F_n$  所作之功之和为零。这说明可以沿光滑曲线  $D$  移动的非自由质点, 在力  $F_1, F_2, \dots, F_n$  作用下, 是处于平衡的。因此, 力  $F_1, F_2, \dots, F_n$  的合力沿曲线  $D$  的法线方向。

于是, 对于由方程(11)所表示的曲线  $D$  的法线, 我们得到了一个极为简单的几何作图法。

现在来看几个特殊情况。

a) 曲线  $D$  是椭圆的情况。此时  $C_1$  和  $C_2$  是二个点(椭圆的焦点), 方程(11)具有  $r_1 + r_2 - 2a = 0$  的形式,  $F_1 = 1, F_2 = 1$ , 椭圆的法线是二焦点矢径之间夹角的二等分线(图 13)。

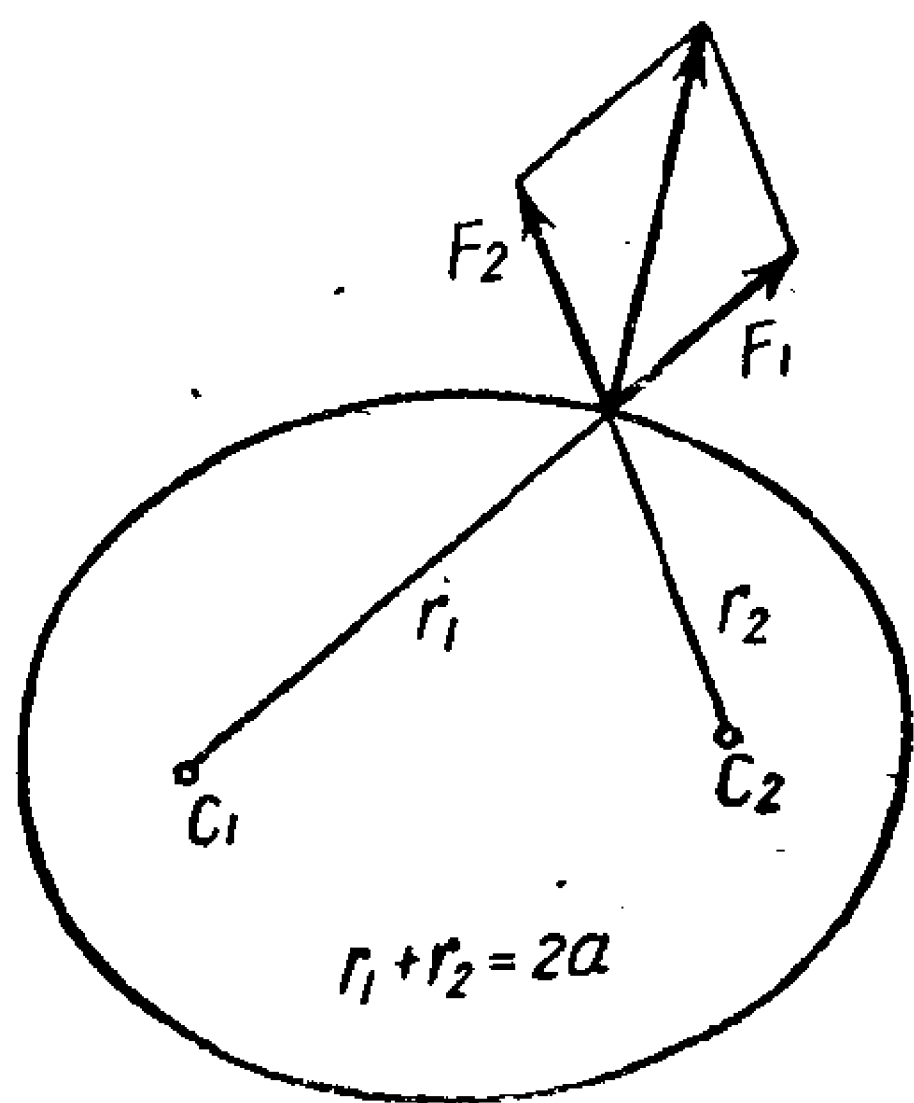


图 13.

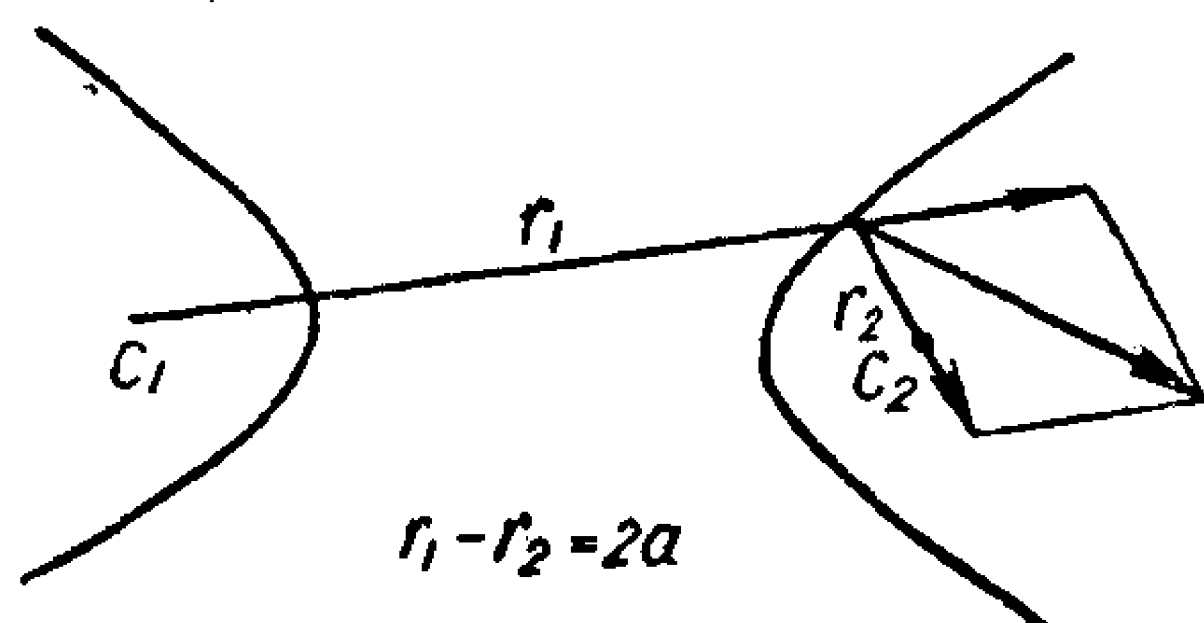


图 14

b)  $D$  是双曲线情况。双曲线方程为:  $r_1 - r_2 - 2a = 0$ ,  $F_1 = 1, F_2 = -1$ , 由作图法不难看出(图 14), 双曲线的切线是二焦点矢径夹角的二等分线(而法线则是焦点矢径夹角的补角二等分线)。

c)  $D$  是抛物线情况(图 15)。此时  $C_2$  是直线(准线), 而  $C_1$  是一个点(焦点)。抛物线的方程为:  $r_1 - r_2 = 0$ 。与双曲线情况一样, 由作图法可以看出, 抛物线的切线是焦点矢径  $r_1$  和到准线的垂线  $r_2$  之间夹角的二等分线。

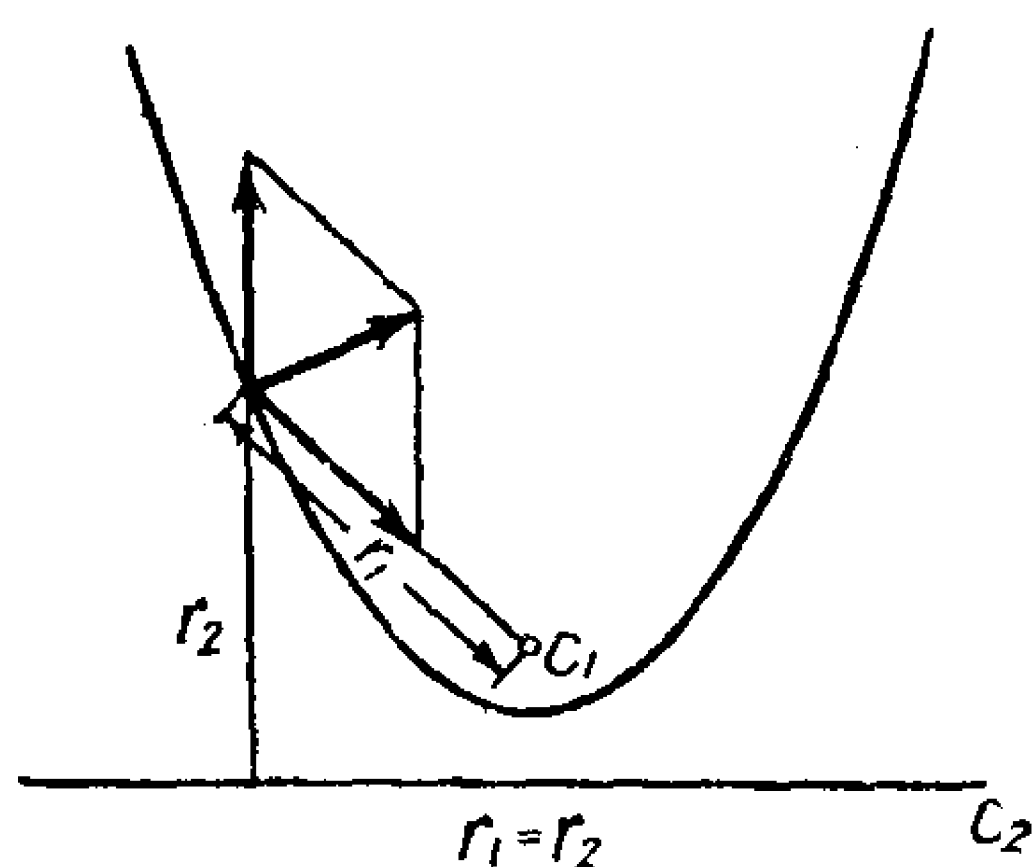


图 15.

表述虚位移原理的方程(1)乃是动力学普遍方程的特殊情况[见第 13 页上的方程(3)]。但是, 动力学普遍方程也可以看作表述虚位移

原理的方程, 它表征出系统的这样一个平衡位置: 当我们把假想的惯性力  $-m_v \omega_v$  也算作主动力  $F_v$  ( $v = 1, \dots, N$ ) 的一部分时所得到的正是这个位置。于是, 我们得到了达朗伯原理。

**达朗伯原理.** 如果在系统运动的任一位置上, 对作用在系统上的主动力系补加以假想的惯性力时, 则系统运动时的任一位置都可以看作平衡位置。

达朗伯原理使我们可以将解决静力学问题的方式、方法用于动力学问题。尤其是, 使我们可以用静力学方法来确定动反力。事实上, 在平衡位置, 反力  $R_v$  仅与  $F_v - m_v \omega_v$  方向不同:

$$F_v - m_v \omega_v = -R_v \quad (v = 1, \dots, N).$$

而这表明

$$m_v \omega_v = F_v + R_v \quad (v = 1, \dots, N),$$

也就是说, 用达朗伯原理确定的反力  $R_v$  就是所要求的动反力。因此, 对于前述达朗伯原理还可以作如下的补充:

将惯性力看做作用在系统各点上的补充主动力, 则给定的动力学问题就可以看作是一个新的静力学问题, 这个新问题中的静

反力也就是原来动力学问题中所要求的反力。

我们用以下的几个例子来说明静力学方法在求解动力学问题上的应用。

**例题 1.** 装了水的煤水车以加速度  $w$  运动。要求确定水面的位置和形状。

当无加速度时, 水面是水平的。此时水面在其每一点都和作用在这个点上的体积力(水的重力)的方向垂直。如果在每个元质量  $dm$  上附加以假想的惯性力  $dJ = -dmw$  之后, 这个静力学结论也可以应用于煤水车作加速运动的情况。在这种情况下, 水面仍然是个平面, 这个平面垂直于两个体积力的合力方向: 一个是铅直方向的重力  $dmg$ , 另一个是水平方向的惯性力  $-dmw$  (图 16)。水面与水平方向有一倾斜角度  $\varphi$ , 而  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{w}{g}$ 。

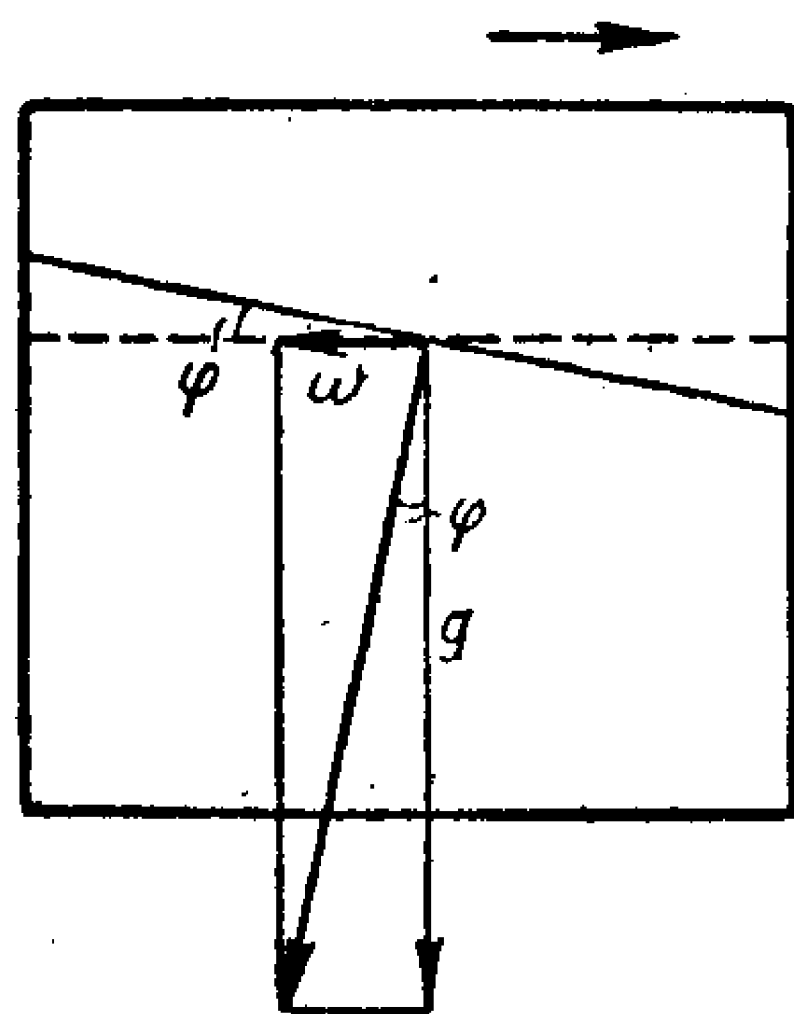


图 16.

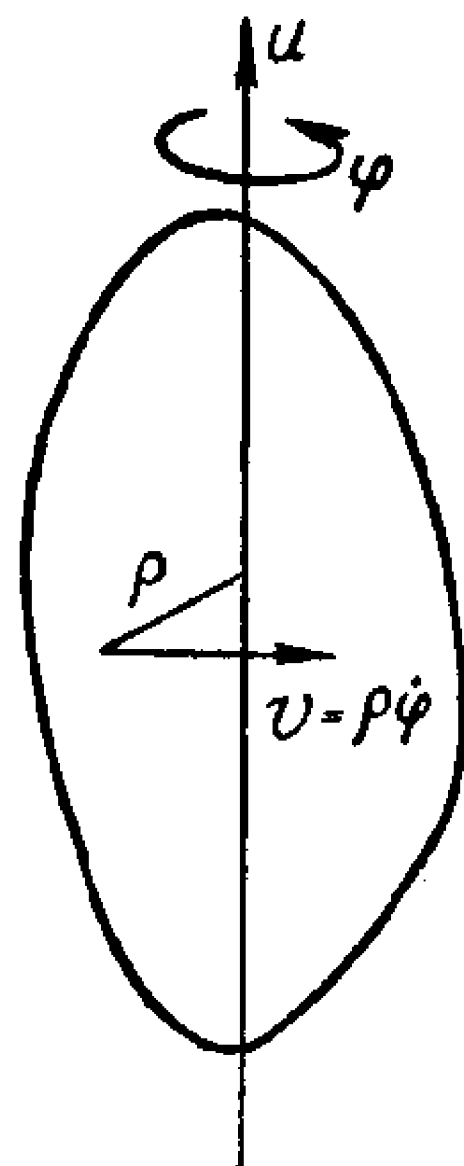


图 17.

2. 写出刚体绕定轴转动的微分方程 (图 17)。在每个元质量  $dm$  上加上假想的惯性力  $-dmw$ 。我们来计算这些惯性力对转轴的主矩

$$-\int dm \rho \ddot{\varphi} \rho = -\ddot{\varphi} \int \rho^2 dm = -I \ddot{\varphi},$$

式中  $I = \int \rho^2 dm$  是物体对转轴  $u$  的转动惯量。以  $L_u$  表示作用在物体上的外力对轴  $u$  的主矩<sup>①</sup>。于是, 按照达朗伯原理, 物体在合力矩  $L_u - I \ddot{\varphi}$  的作用

① 内力的主矩等于零。

下就可以处于平衡。因此,这个合力矩应当等于零(見第19頁),即

$$I\ddot{\varphi} = L_u.$$

3. 水平均匀軸以等角速度  $\omega$  轉动。垂直于轉軸軸綫安装一均匀质量的偏心圓盘,圓盘到轉軸两端軸承的距离相等。求当軸轉动时的軸承压力。

我們来看圓盘上各个元质量  $dm$  的慣性力  $dm\omega^2 r$  (图18)。这是个汇交力系,各个力的方向都是背离轉軸的。这些力的合力等于  $J = \omega^2 \int r dm =$

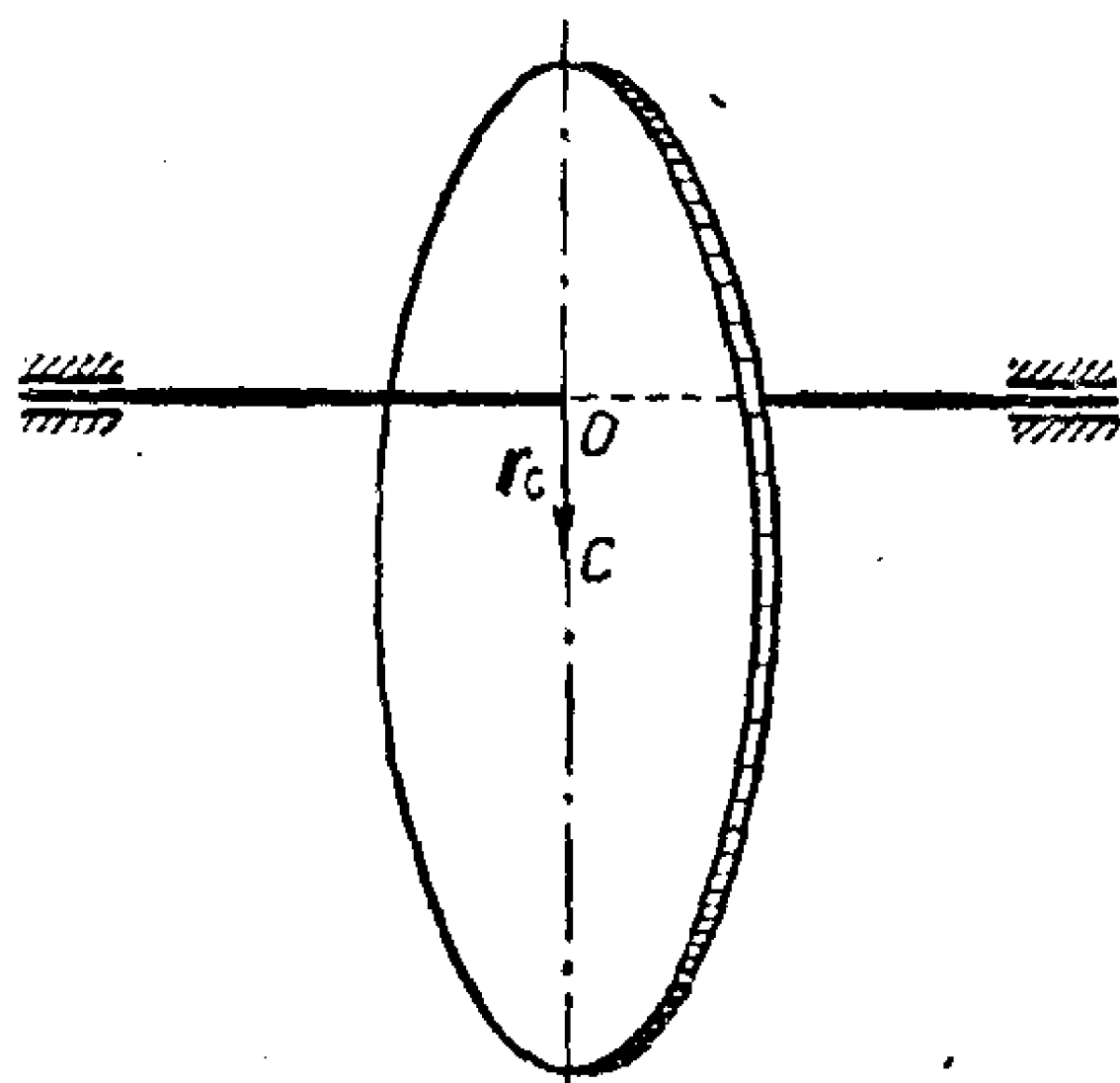


图 18.

$= M_1 \omega^2 r_C$ , 其中  $M_1$  是圓盘的质量,  $r_C = OC$  ( $O$  是圓盘与軸綫的交点,  $C$  是圓盘的几何中心)。現在来用达朗伯原理确定軸在以下三种力作用下軸承上的靜压力: 1) 軸的重量  $Mg$ , 2) 圓盘的重力  $M_1 g$ , 3) 力  $J = M_1 \omega^2 r_C$  ①。

每个軸承上的压力  $N$  可以由如下的公式来确定:

$$N = \frac{1}{2} (M + M_1) g + \frac{1}{2} M_1 \omega^2 r_C.$$

当圓盘的几何中心  $C$  位于  $O$  点之下时, 力  $N$  具有最大值

$$N_{\max} = \frac{1}{2} (M + M_1) g + \frac{1}{2} M_1 \omega^2 OC.$$

### § 5. 完整系統 · 独立坐标 · 广义力

假設給定了一个由  $N$  个质点  $P_v$  組成的完整系統。各点的矢徑  $\mathbf{r}_v = x_v \mathbf{i} + y_v \mathbf{j} + z_v \mathbf{k}$  ② ( $v = 1, \dots, N$ )。加在系統上的有限約束为

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}_v) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d), \quad (1)$$

或(等价的写法)

$$f_\alpha(t, x_v, y_v, z_v) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d). \quad (1')$$

我們將假定  $3N$  个变数  $x_v, y_v, z_v$  ( $v = 1, \dots, N$ ) 的  $d$  个函数  $f_\alpha$

① 轉軸上各元慣性力的合力等于零, 所以未予考虑。

②  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  是慣性坐标系統各軸  $Ox, Oy, Oz$  的单位矢量。



是独立的<sup>①</sup>； $t$  在这里被看作参数。因此，我們可以由方程(1')将  $d$  个坐标解为時間  $t$  和其余  $3N-d$  个坐标的函数，并将这  $3N-d$  个坐标看作确定系統在时刻  $t$  的位置的独立变量。

但是，并不一定要取笛卡尔坐标作为这些独立变量。可以将所有的  $3N$  个笛卡尔坐标以  $n=3N-d$  个独立参数  $q_1, \dots, q_n$  和  $t$  的函数形式表出：

$$\left. \begin{aligned} x_\nu &= \varphi_\nu(t, q_1, \dots, q_n), & y_\nu &= \psi_\nu(t, q_1, \dots, q_n), \\ z_\nu &= \chi_\nu(t, q_1, \dots, q_n) \quad (\nu=1, \dots, N). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

当以这些函数代入約束方程(1')时，方程(1')就变为恒等式。此外，我們假定系統在給定时刻为約束所容許的任何位置，都可以从給  $q_1, \dots, q_n$  以一定的值而由等式(2)得到。

等式(2)和如下的矢量等式是等价的：

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t, q_1, \dots, q_n) \quad (\nu=1, \dots, N). \quad (2')$$

假定数量函数(2)[因而，矢量函数(2')]是連續且可微的。

就完整系統而言，当以最少的  $q_i$ ，通过公式(2)能够将系統的一切可能位置包括无余时，这些  $q_i$  的个数和系統的自由度  $n=3N-d$  相等(見第8頁)。

公式(2)或(2')中的量  $q_1, \dots, q_n$  ( $n$  是自由度)称为系統的独立广义坐标。

对于每一时刻  $t$ ，系統的可能位置和  $n$  維坐标空間( $q_1, \dots, q_n$ ) 中某区域内的点之間建立起了一一对应的关系。系統在时刻  $t$  的每一位置都有空間( $q_1, \dots, q_n$ ) 中表示系統这个位置的点与之对应。与系統运动相对应的則是坐标空間( $q_1, \dots, q_n$ )中的点的运动。

① 在相反的情况下，例如，当有形如

$$f_d = \Omega(f_1, \dots, f_{d-1}, t)$$

的关系存在时，則約束之一(在此即  $f_d=0$ )或者与其余的約束矛盾[当  $\Omega(0, \dots, 0, t) \neq 0$  时]，或者是其余約束的推論[当  $\Omega(0, \dots, 0, t) \equiv 0$  时]。

如果全体约束都是平稳的(平稳系统!), 则时间  $t$  不显含于方程(1')。因之, 总可以找到这样的一些坐标  $q_1, \dots, q_n$ , 使得在方程(2)中也不显含时间  $t$ 。往后, 对于平稳系统, 我们总是假定独立坐标  $q_1, \dots, q_n$  正是这样选取的。于是, 对于平稳系统, 公式(2)和(2')具有如下形式:

$$x_\nu = \varphi_\nu(q_i), \quad y_\nu = \psi_\nu(q_i), \quad z_\nu = \chi_\nu(q_i) \quad (\nu = 1, \dots, N), \quad (3)$$

或

$$r_\nu = r_\nu(q_i) \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (3')$$

**例题 1.** 在平面里运动的双摆有两个自由度(图 19)。可以选角  $\varphi$  和角  $\psi$  作为独立坐标  $q_1$  和  $q_2$ 。

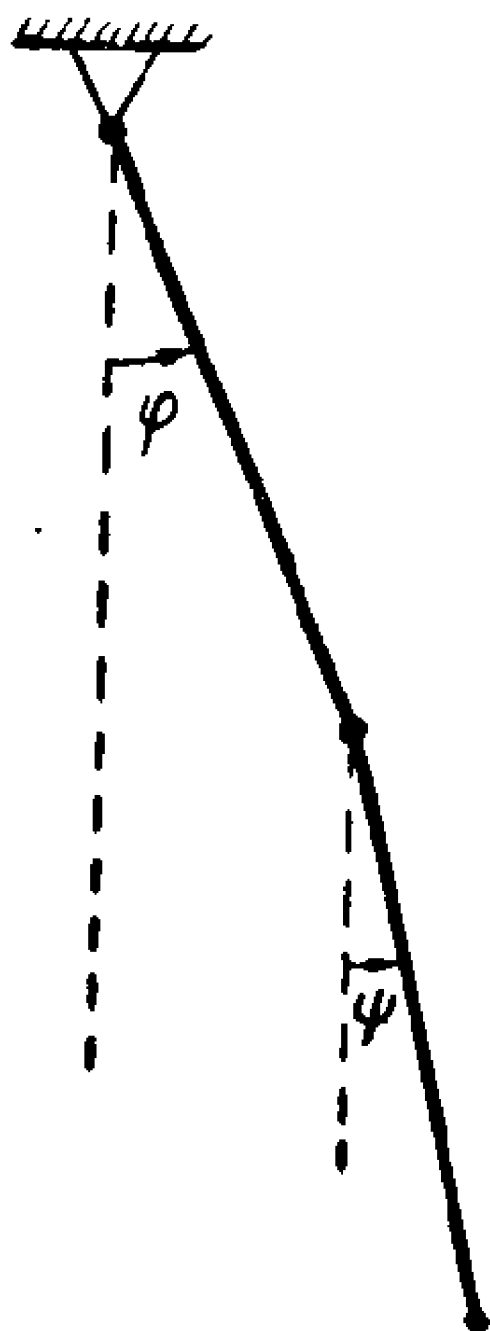


图 19.

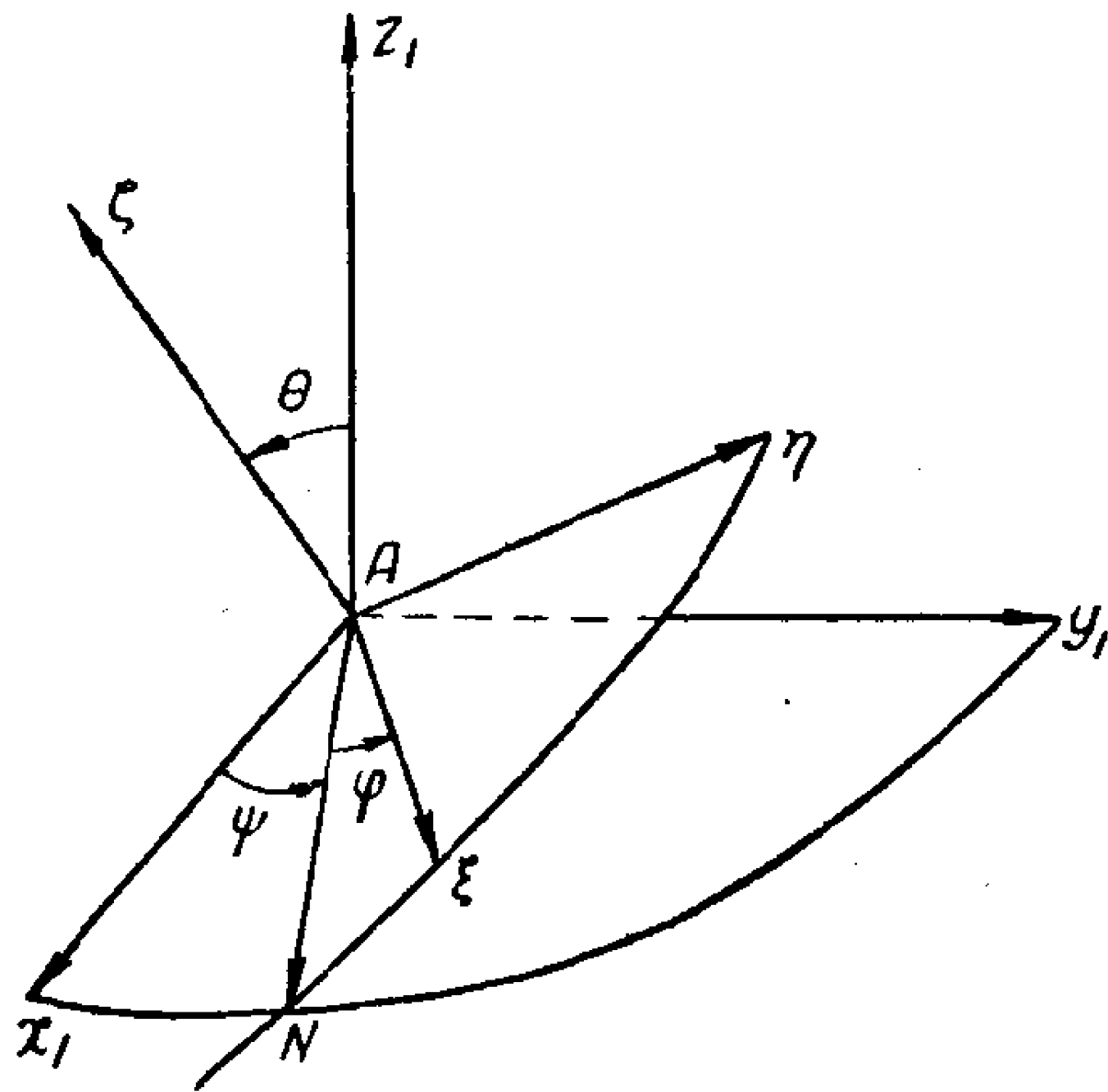


图 20.

2. 自由刚体有 6 个自由度。作为独立坐标, 可以取物体上任意一点  $A$  的三个笛卡尔坐标  $x_A, y_A, z_A$  和三个欧拉角  $\psi, \theta$  和  $\varphi$ , 这三个欧拉角决定了固联在物体上的轴系  $A\xi\eta\zeta$  相对于固定坐标轴系  $Ox_1y_1z_1$  的转动。

欧拉角可按如下方式确定(图 20)。由  $A$  点引三个轴  $Ax_1, Ay_1, Az_1$  分别和轴  $Ox, Oy, Oz$  平行且同向。平面  $Ax_1y_1$  和平面  $A\xi\eta$  的交线  $AN$  称为结线①。  $Az_1$  轴和  $A\zeta$  轴之间的夹角  $\theta$  叫做“章动角”;  $Ax_1$  轴和  $AN$  轴之间的

①  $AN$  轴的方向是这样定的:  $Az_1$  轴沿最小角绕  $AN$  轴转到  $A\zeta$  轴时, 转动方向是反时针的。

夹角  $\psi$  叫做“进动角”； $AN$  軸与  $A\xi$  軸間的夹角  $\varphi$  叫做“自轉角”。

三面体  $Oxyz$  沿軸  $Ox, Oy, Oz$  分別平行移动  $x_A, y_A, z_A$  便到  $Ax_1y_1z_1$  的位置。依次繞  $Az_1$  軸轉过一角度  $\psi$ , 繞  $AN$  軸轉过一角度  $\theta$ , 繞  $A\xi$  軸轉过一角度  $\varphi$  三面体  $Ax_1y_1z_1$  便轉到了  $A\xi\eta\zeta$  的位置。

因此,  $x_A, y_A, z_A, \psi, \theta, \varphi$  的值就决定了三面体  $A\xi\eta\zeta$  相对于三面体  $Oxyz$  的位置, 即决定了給定剛体相对于原坐标軸系的位置。

剛体上的任意一点可由其坐标  $\xi, \eta, \zeta$  确定。这个点的  $x, y, z$  坐标可以写作量  $x_A, y_A, z_A, \psi, \theta, \varphi$  的函数。例如, 由图 20 不难看出

$$z = z_A + \xi \sin \varphi \sin \theta + \eta \cos \varphi \sin \theta + \zeta \cos \theta.$$

对于  $x$  和  $y$  也有与此相仿的、略为复杂的公式成立<sup>①</sup>。这些公式都是公式(3)的特殊情况。它們不明显地包含時間  $t$ 。因之, 自由剛体是平稳系統。

我們注意, 当剛体运动时, 量  $x_A, y_A, z_A, \psi, \theta, \varphi$  是在变的, 同时, 前面所讲的, 把由  $Oxyz$  到  $A\xi\eta\zeta$  的过程可以分解为三个平动和三个轉动的这种分解, 使我們得到一个关于剛体作任意复杂(合成)运动的概念, 这个复杂运动由六个簡單运动組成: 三个(沿  $Ox, Oy, Oz$  軸的)平动和三个(繞  $Az_1, AN, A\xi$  軸的)純轉动。由于复杂运动的角速度等于各分角速度的矢量和, 所以

$$\omega = \omega_\psi + \omega_\theta + \omega_\varphi, \quad (4)$$

其中  $\omega_\psi, \omega_\theta, \omega_\varphi$  分別沿軸  $Az_1, AN, A\xi$  的方向, 而且  $\omega_\psi = \dot{\psi}, \omega_\theta = \dot{\theta}, \omega_\varphi = \dot{\varphi}$ 。

3. 自由质点有三个自由度。作为独立坐标可以取点的笛卡尔坐标或任何其它坐标。在取柱坐标  $r, \psi, z$  作为  $q_1, q_2, q_3$  的情况下, 公式(2)有如下形式(图 21):

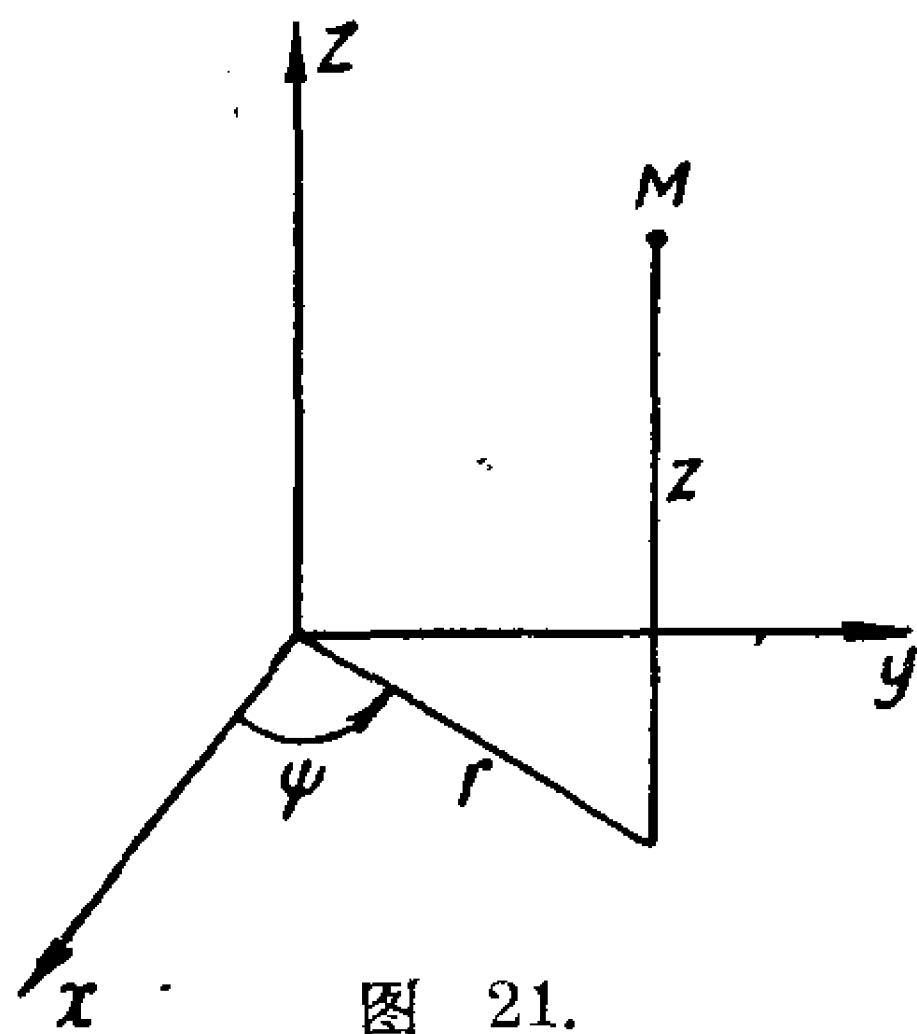


图 21.

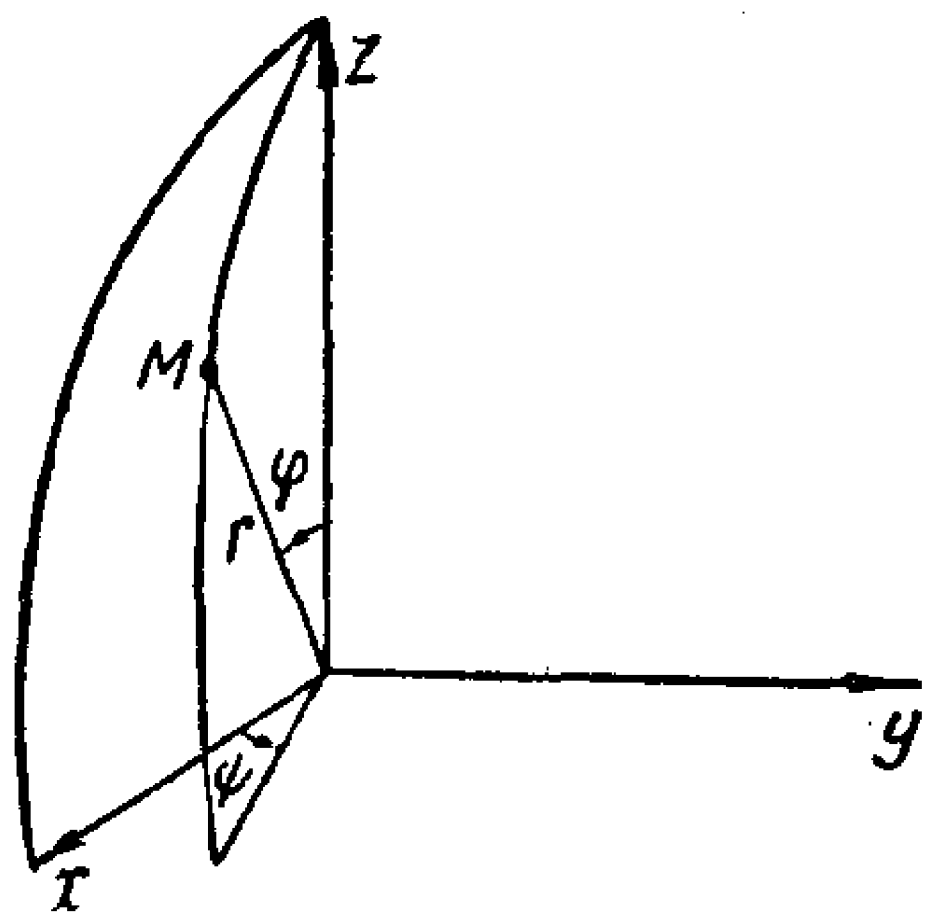


图 22.

<sup>①</sup> 例如, 可以参看 Суслов Г. К., Теоретическая механика, М.—Л., 1944, 第 77 頁和 83 頁。

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi, \quad z = z. \quad (5)$$

在球坐标  $r, \varphi, \psi$  的情况下(图 22), 代替公式(5)有:

$$x = r \cos \psi \sin \varphi, \quad y = r \sin \psi \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi. \quad (6)$$

#### 4. 在动球面

$$(x-at)^2 + (y-bt)^2 + (z-ct)^2 = r^2$$

上的非自由质点  $M$ 。此时  $n=2$ , 可以取球面上的“经度”和“纬度”作独立坐标(图 23):

$$x = at + r \cos q_1 \cos q_2, \quad y = bt + r \sin q_1 \cos q_2, \quad z = ct + r \sin q_2.$$

与每个坐标  $q_i$  相对应的有它自己的广义力  $Q_i (i=1, \dots, n)$ 。

广义力可按下述方式定义。我们来看主动力在虚位移上的元功:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu} \delta \mathbf{r}_{\nu}. \quad (7)$$

但虚位移  $\delta \mathbf{r}_{\nu}$  乃是函数  $\mathbf{r}_{\nu}(t, q_i)$  的虚微分[即当  $t$  被固定(“凝固”)时的微分]①:

$$\delta \mathbf{r}_{\nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (\nu=1, \dots, N). \quad (8)$$

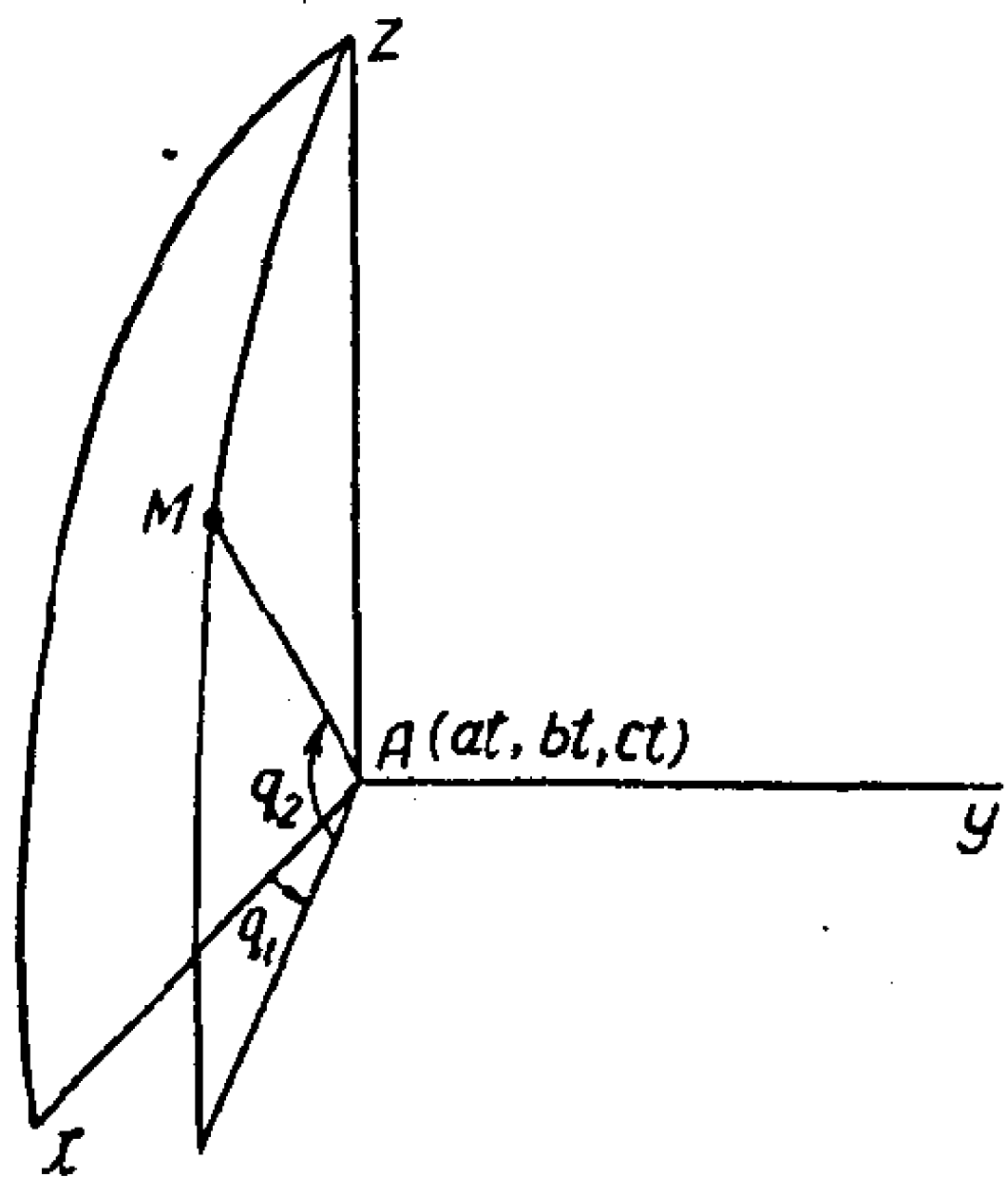


图 23.

将表达式(8)代入公式(7)的右端, 并以独立坐标  $q_i$  的任意的元增量  $\delta q_i (i=1, \dots, n)$  来表示主动力在虚位移上的元功:

① 事实上, 将函数  $\mathbf{r}_{\nu}(t, q_i) (\nu=1, \dots, N)$  代入约束方程  $f_{\alpha}(t, \mathbf{r}_{\nu}) = 0 (\alpha=1, \dots, d)$ , 则约束方程成为恒等式。将所得恒等式中的  $t$  固定, 并逐项微分之, 即得:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \delta \mathbf{r}_{\nu} = 0 \quad (\alpha=1, \dots, d), \quad (*)$$

其中  $\delta \mathbf{r}_{\nu} (\nu=1, \dots, N)$  是虚微分。但方程 (\*) 和第 6 页上方程 (7) 的前  $d$  个是一样的, 这些方程确定了完整系统的虚位移。因此, 矢径的虚微分是完整系统中点的虚位移。



$$\delta A = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) \cdot \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (9)$$

式中  $\delta q_i$  的系数——“广义力  $Q_i$ ”——由如下的等式确定：

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (10)$$

应当注意，实际上在求  $Q_i$  时并不利用公式(10)。为了确定  $Q_i$  我們給系統这样一个虚位移：仅使第  $i$  个坐标  $q_i$  得到某一增量，而其余的独立坐标保持不变。然后計算主动力在这样特别选取的位移上的功  $\delta A_i$ 。于是， $\delta A_i = Q_i \delta q_i$ ，因而

$$Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}.$$

**例題 5.** 只能沿  $x$  軸平动的剛体。此时  $n=1$ ，可以取物体上任意一点  $A$  的横坐标  $x$  作为独立坐标。这时

$$\delta A = X \delta x, \quad (11)$$

式中  $X$  是作用在物体上的全部主动力在  $x$  軸上投影的和。显然， $X$  就是关于坐标  $x$  的广义力：

$$Q = X. \quad (12)$$

6. 仅能繞某固定軸  $u$  轉动的剛体。可取适当的轉角  $\varphi$  作独立坐标。于是，

$$\delta A = L_u \delta \varphi, \quad (13)$$

其中  $L_u$  是全体主动力对轉軸的力矩之和，而且，

$$Q = L_u. \quad (14)$$

7. 自由剛体。我們取剛体上任意一点  $A$  的三个坐标  $x_A, y_A, z_A$  和三个欧拉角  $\psi, \theta, \varphi$  作为独立坐标(見第 28—29 頁上的例題 2)。于是，根据等式(9)，

$$\delta A = Q_x \delta x + Q_y \delta y + Q_z \delta z + Q_\psi \delta \psi + Q_\theta \delta \theta + Q_\varphi \delta \varphi. \quad (15)$$

为了确定  $Q_x$ ，我們給物体一沿  $x$  軸之元位移。于是， $\delta y_A = \delta z_A = 0$ ， $\delta \psi = \delta \theta = \delta \varphi = 0$ 。因之， $\delta A = Q_x \delta x_A$ 。与等式(11)相比較即得

$$Q_x = X.$$

与此相仿， $Q_y = Y$ ， $Q_z = Z$ 。这里的  $X, Y, Z$  是作用在物体上的全体主动力的主矢量在  $x, y, z$  軸上的投影。

現在再給物体这样一个元位移：仅使  $\psi$  角变，而保持量  $x_A, y_A, z_A, \theta, p$  不变。于是，得

$$\delta A = Q_\psi \delta \psi.$$

从另一方面来看，上述元位移正是物体繞  $Az_1$  軸的轉动。因此，按公式(13)，

$$Q_\psi = L_\psi,$$

其中  $L_\psi$  是所有主动力对  $Az_1$  軸之矩之和，而軸  $Az_1$  乃是实现轉角  $\psi$  的轉軸。

完全类似地可以得到  $Q_\theta = L_\theta, Q_p = L_p$ ，其中  $L_\theta$  和  $L_p$  是主动力对  $AN$  軸和  $A\xi$  軸之矩之和。

利用剛体上主动力的元功表达式(見第 19 頁)①

$$\delta A = R \delta r_A + L_A \omega dt \quad (16)$$

也可以得到广义力的同样的表达式。式中  $R$  和  $L_A$  是力系对极点  $A$  的主矢量和主矩。由于  $\omega = \omega_\psi + \omega_\theta + \omega_p$  (見公式(4))，其中  $\omega_\psi = \dot{\psi}$ ， $\omega_\theta = \dot{\theta}$ ， $\omega_p = \dot{p}$ ，而矢量  $L_A$  在矢量  $\omega_\psi, \omega_\theta, \omega_p$  方向的投影分別等于  $L_\psi, L_\theta, L_p$ ，于是，由公式(16)得

$$\delta A = X \delta x_A + Y \delta y_A + Z \delta z_A + L_\psi \delta \psi + L_\theta \delta \theta + L_p \delta p. \quad (17)$$

将表达式(17)和(15)加以比較即可得出广义力的表达式。

現在假設系統的某位置是平衡位置。按照虛位移原理，当而且只有当下式成立时才是可能的：

$$\delta A = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0. \quad (18)$$

但独立坐标  $q_i$  的增量  $\delta q_i$  可以是完全任意的。因此，等式(18)和如下的一組等式是等价的：

$$Q_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (19)$$

所以，完整系統的某位置是平衡位置的必要充分条件是：在此位置上全体广义力等于零。

① 因为我們在这里討論的是平稳系統，故可将符号  $\delta$  改写为符号  $d$ ，反之也可以。因此， $d\mathbf{r}_A = \delta\mathbf{r}_A$ ， $\delta\psi = d\psi = \dot{\psi}dt$ ， $\delta\theta = \dot{\theta}dt$ ， $\delta p = \dot{p}dt$ 。

**例题 8.** 按照等式(19), 自由刚体的平衡条件可以写作:

$$X=Y=Z=0, \quad L_\psi=L_\epsilon=L_\varphi=0 \quad (20)$$

(見前例)。这里的  $X, Y, Z$  是作用在物体上的外力主矢量  $R$  在坐标轴上的投影,  $L_\psi, L_\epsilon, L_\varphi$  是这些力的主矩  $L_A$  在不共面的三个轴上的投影。因此, 数量等式(20)与矢量等式

$$R=0, \quad L_A=0$$

是等价的。此即自由刚体平衡的必要充分条件, 这些条件我們曾在第 19 頁上得到过。

## § 6. 独立坐标下的第二类拉格朗日方程

我們从动力学普遍方程

$$\sum_{v=1}^N (F_v - m_v \mathbf{w}_v) \delta \mathbf{r}_v = 0 \quad (1)$$

出发, 来着手推导独立坐标  $q_1, \dots, q_n$  下完整系統的运动微分方程。

在上一节中已經得到主动力的元功表达式为:

$$\delta A = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (2)$$

其中

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (3)$$

可以完全类似地写出慣性力  $-m_v \mathbf{w}_v$  ( $v=1, \dots, N$ ) 的元功:

$$\delta A_J = - \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \delta \mathbf{r}_v = - \sum_{i=1}^n Z_i \delta q_i, \quad (4)$$

和表达式(3)相似, 这里

$$Z_i = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = \sum_{v=1}^N m_v \frac{d\dot{\mathbf{r}}_v}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \dot{r}_{\nu} \frac{\partial r_{\nu}}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \dot{r}_{\nu} \frac{d}{dt} \frac{\partial r_{\nu}}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (5)$$

但速度

$$\dot{r}_{\nu} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_{\nu}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_{\nu}}{\partial t} \quad (6)$$

线性地依赖于  $\dot{q}_k$  ( $k=1, \dots, n$ )。所以, 由上式可得

$$\frac{\partial \dot{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial r_{\nu}}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n; \nu=1, \dots, N). \quad (7)$$

另一方面, 由同一个等式(6)我们得到:

$$\frac{\partial \dot{r}_{\nu}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r_{\nu}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_{\nu}}{\partial q_i \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial r_{\nu}}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n; \nu=1, \dots, N). \quad (8)$$

因之,  $Z_i$  的表达式(5)还可以写成

$$Z_i = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \dot{r}_{\nu} \frac{\partial \dot{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \dot{r}_{\nu} \frac{\partial \dot{r}_{\nu}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (9)$$

的形式, 其中  $T$  是系统的动能:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \dot{r}_{\nu}^2. \quad (10)$$

由动力学普遍方程(1), 得:

$$\delta A + \delta A_J = 0, \quad (11)$$

或按等式(2)和(4)将它写作

$$\sum_{i=1}^n (Q_i - Z_i) \delta q_i = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (12)$$

因为坐标  $q_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的增量  $\delta q_i$  是完全任意的, 所以当而



且只有当其全体  $\delta q_i$  的系数等于零时等式(12)才成立。因之，动力学普遍方程(12)和方程组

$$Z_i = Q_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (13)$$

等价。根据关系式(9)，方程组(13)可以写成如下形式：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (14)$$

方程(14)称为第二类拉格朗日方程或独立坐标下的拉格朗日方程。

量  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 称为广义速度。系统各点速度  $v_a = \dot{r}_a$  可按公式(6)以广义速度(以及独立坐标和时间)表出。量  $\ddot{q}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 称为广义加速度。

拉格朗日方程(14)的左端，在完成  $\frac{d}{dt}$  的运算之后，将包含时间  $t$ 、广义坐标  $q_i$ 、广义速度  $\dot{q}_i$  和广义加速度  $\ddot{q}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )。拉格朗日方程右端的广义力  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 通常都是  $t, q_k, \dot{q}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) 的已知函数<sup>①</sup>：

$$Q_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (15)$$

拉格朗日方程(14)构成一个包含  $n$  个二阶常微分方程的方程组，组中有  $n$  个依赖于独立变量  $t$  的未知函数  $q_i$ 。这个方程组的阶数等于  $2n$ 。应当注意，决定  $n$  自由度完整系统运动的微分方程的阶不可能低于  $2n$ ，因为，根据变量  $q_i$  和  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 的初值的任意性，方程组的解至少应该包含  $2n$  个任意常数。因此，独立坐标下的拉格朗日方程组具有最小可能的阶。

在非自由系统的情况下，还必须确定反力  $R_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ )，但反力是不包含在拉格朗日方程中的，这也正是拉格朗日方程的

① 见本节公式(3)和(6)以及第9页上的公式(10)和第27页上的公式(2')。

主要优点。将拉格朗日方程积分之后，求得函数  $q_i(t)$  ( $i=1, \dots, n$ ) [将函数  $q_i(t)$  代入第 27 页上的公式 (2')] 就可以确定  $r_\nu = r_\nu(t)$ ，因而也就可以确定  $v_\nu = \dot{r}_\nu$ ， $w_\nu = \ddot{r}_\nu$  以及  $F_\nu(t, r_\nu, \dot{r}_\nu)$  ( $\nu=1, \dots, N$ )。于是，未知反力就可以由下式求得：

$$R_\nu = m_\nu w_\nu - F_\nu \quad (\nu=1, \dots, N). \quad (16)$$

在自由质点系统的情况下，拉格朗日方程乃是任何坐标系统中运动方程的完整而紧凑的写法。

**例题 1.** 刚体绕定轴  $u$  转动。我们取转角  $\varphi$  作为独立坐标。对应的广义力  $Q$  等于转动力矩  $L_u$  (见第 31 页上的例题 6)。另外， $T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$ ，其中  $I$  是物体对转轴的转动惯量。

在拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

中，以

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad Q = L_u$$

代入之，便得到

$$I \ddot{\varphi} = L_u.$$

这就是刚体绕定轴的转动微分方程。

2. 在平面里运动的双数学摆(图 24)。

它的元功表达式为：

$$\delta A = m_1 g \delta z_1 + m_2 g \delta z_2,$$

其中  $z_1 = l_1 \cos \varphi_1$ ,  $z_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2$ .

算出  $\delta z_1$  和  $\delta z_2$  即得

$$\delta A = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - m_2 g l_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_2,$$

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1, \quad Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

另外，

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2] \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2. \end{aligned}$$

第一个拉格朗日方程

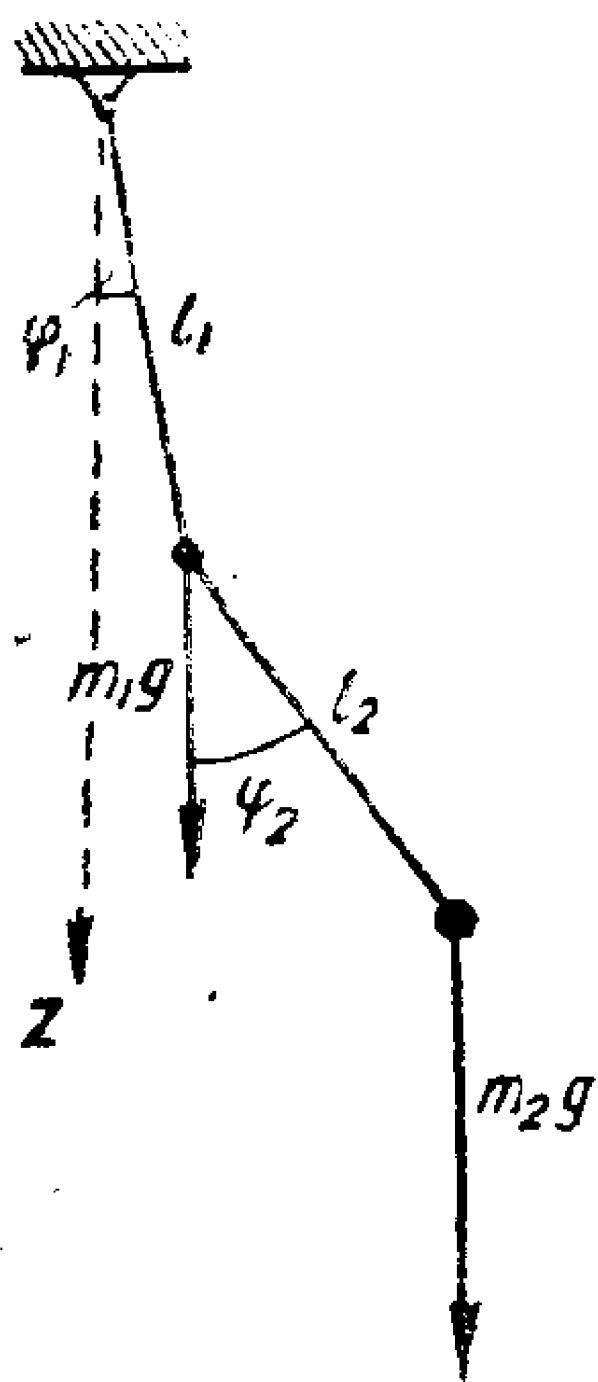


图 24.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} - \frac{\partial T}{\partial p_1} = Q_1$$

有如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

建議讀者自己导出对应于坐标  $p_2$  的第二个拉格朗日方程。

3. 求自由质点在球坐标中的运动微分方程 (見第 29 頁上的例題 3 和第 29 頁上的图 22)。点的速度等于如下三个速度的矢量和: 1) 徑向速度; 2) 由于向徑在子午面內的轉动而引起的速度; 3) 由于子午面轉动而引起的速度。这三个速度是相互垂直的, 故

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \sin^2 \varphi \dot{\psi}^2).$$

为了得到广义力  $Q_r$ , 我們給质点一沿向徑的位移。此时  $\delta A_r = F_r \delta r$ , 其中  $F_r$  是作用力  $F$  在向徑方向的投影。因之,  $Q_r = F_r$ 。

現在給点一沿子午綫的元位移。于是, 有  $\delta A_\varphi = F_\varphi r \delta \varphi$ , 其中  $F_\varphi$  是力  $F$  在子午綫切綫上的投影<sup>①</sup>。因此,

$$Q_\varphi = F_\varphi r.$$

与此相仿,

$$Q_\psi = F_\psi r \sin \varphi,$$

式中  $F_\psi$  是力  $F$  在緯綫切綫上的投影。

关于坐标  $r$  的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r$$

有如下的形式:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\sin^2\varphi\dot{\psi}^2) = F_r.$$

对于坐标  $\varphi$  和  $\psi$ , 得方程:

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} - r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\psi}^2) = F_\varphi,$$

$$m(r\sin\varphi\ddot{\psi} + 2\sin\varphi\dot{r}\dot{\psi} + 2r\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{\psi}) = F_\psi.$$

我們得到了自由质点在球坐标中的三个运动微分方程。

① 子午綫和緯綫的切綫各沿坐标  $\varphi$  和  $\psi$  的增长方向。

## § 7. 拉格朗日方程的研究

为了建立拉格朗日方程, 首先需要求得动能作为时间  $t$ 、广义坐标  $q_i$  和广义速度  $\dot{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的函数表达式。它可以写成如下的一般形式:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i + a_0. \end{aligned} \quad (1)$$

这里的系数  $a_{ik}$ ,  $a_i$ ,  $a_0$  都是  $t, q_1, \dots, q_n$  的函数, 由下列等式决定:

$$a_{ik} = \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \quad (i, k=1, \dots, n) \textcircled{1}, \quad (2)$$

$$a_i = \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \quad (i=1, \dots, n), \quad (3)$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left( \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right)^2. \quad (4)$$

公式(1)表明, 完整系统的动能是关于广义速度的二次(多项式)函数:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (5)$$

其中

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i, \quad T_0 = a_0. \quad (6)$$

在平稳系统的情况下, 如像在 § 1 中指出的那样, 由于时间  $t$  不明显地包含在  $\mathbf{r}_v$  和  $q_i$  之间的关系式中, 所以,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} = 0 \quad (v=1, \dots, N).$$

① 由公式(2)可以看出  $a_{ik} = a_{ki}$  ( $i, k=1, \dots, n$ )。



于是,由等式(3)和等式(4)可知

$$a_0=0, \quad a_i=0 \quad (i=1, \cdots, n),$$

因而

$$T=T_2=\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

故平稳系统的动能是广义速度的二次齐次函数(二次型)。

应当注意的是,任何(平稳的或非平稳的)完整系统的二次型  $T_2$  总是非奇异的,即  $T_2$  的系数行列式是异于零的:

$$\det(a_{ik})_{i,k=1}^n \neq 0. \quad (7)$$

事实上,如果

$$\det(a_{ik})_{i,k=1}^n \equiv 0,$$

则线性齐次方程组

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \lambda_k = 0 \quad (i=1, \cdots, n) \quad (8)$$

有实的非零解。

依次以  $\lambda_i$  乘组(8)各方程,并按  $i$  从 1 到  $n$  相加,则由公式(2)得:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \lambda_i \lambda_k = \sum_{i,k=1}^n \left( \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \right) \lambda_i \lambda_k = \\ &= \sum_{v=1}^N m_v \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right)^2. \end{aligned}$$

由此便有

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = 0 \quad (v=1, \cdots, N). \quad (9)$$

这  $N$  个矢量等式可以换成  $3N$  个数量等式:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0 \quad (9')$$

$$(\nu = 1, \dots, N).$$

等式(9')表明, 雅科毕函数矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_1}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial x_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_N}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial y_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{pmatrix} \quad (10)$$

的各列是线性相关的, 即这个函数矩阵的秩  $\rho$  小于  $n$ 。因之, 在依赖于  $n$  个变量  $q_1, \dots, q_n$  (将  $t$  看作参数) 的  $3N$  个函数  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$  中有  $\rho$  个是独立的, 而且可以通过它们表出系统各点全部其余的笛卡尔坐标。但是这和系统独立坐标的最少个数等于自由度  $n$  是矛盾的, 因为  $\rho < n$ 。因此, 不等式(7)成立<sup>①</sup>。

不等式(7)所表示的关于二次型  $T_2$  的系数的那个性质是很重要的, 今后我们将不止一次地要用到它。应当注意, 由于恒有  $T_2 \geq 0$  ( $T_2$  是当约束被“凝固”时系统的动能!), 所以由不等式(7)

① 在个别(奇异)点上, 函数矩阵(10)的秩可能小于  $n$ 。在这些奇异点上  $\det (a_{ik})_{i,k=1}^n = 0$  是可能的。在我们今后的讨论中将系统的这种奇异位置除外。

便可以断定\* 二次型  $T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$  是正定的, 即  $T_2 \geq 0$ , 且只

有当全体  $\dot{q}_i (i=1, \dots, n)$  等于零时才有  $T_2=0$ 。因此, 关于系数  $a_{ik}$  有如下的塞尔維司特不等式①:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (11)$$

将动能的表达式(1)代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, \dots, n), \quad (12)$$

則得

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{q}_k + (**) = Q_i(t, q_j, \dot{q}_j) \quad (i=1, \dots, n). \quad (13)$$

这里符号(\*\*)表示那些不包含坐标对时间的二次导数的各项之和。右端同样也不包含二次导数, 因为在一般情况下它們都是量  $t, q_j, \dot{q}_j (j=1, \dots, n)$  的函数。

由于  $\det(a_{ik})_{i,k=1}^n \neq 0$ , 故方程(13)可按二次导数解出, 写成

$$\ddot{q}_i = G_i(t, q_k, \dot{q}_k) \quad (i=1, \dots, n) \quad (14)$$

的形式。于是, 如像常微分方程理論所告訴我們的那樣, 当右端的  $G_i$  滿足某些条件时 (这些条件在力学問題中总是假定被滿足

$$* \text{由 } T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left( \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \frac{\partial r_v}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 = 0 \text{ 得}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0. \text{ 以 } m_v \frac{\partial r_v}{\partial q_k} \text{ 乘这等式两端, 并按 } v \text{ 从 } 1 \text{ 加到 } N \text{ 即得 } \sum_{i=1}^n a_{ik} \dot{q}_i = 0. \text{ 于}$$

是, 由不等式(7)便有  $\dot{q}_i = 0 (i=1, \dots, n)$ 。——譯者注

① 参閱, 例如, Ф. Р. Гантмахер, 矩陣論 (柯召譯, 高等教育出版社 1955 年版) 第 305 頁。

的<sup>①</sup>), 拉格朗日方程对于预先给定的 ( $t=t_0$  时的) 任何初始数据  $q_i^0, \dot{q}_i^0$  ( $i=1, \dots, n$ ) 永远有解, 而且有唯一的解。因此, 完整系统的运动完全决定于系统的初始位置( $q_i^0$ )和初始速度( $\dot{q}_i^0$ )。

### § 8. 总能量变化定理·有势力·迴轉仪力和耗散力

若广义力与广义速度无关, 即

$$Q_i = Q_i(t, q_1, \dots, q_n) \quad (i=1, \dots, n), \quad (1)$$

并存在函数  $\Pi(t, q_1, \dots, q_n)$  使

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n), \quad (2)$$

则力  $Q_i$  称为有势力, 而函数  $\Pi$  称为力的势或势能。确定势  $\Pi$  的等式(2)可以写成如下形式<sup>②</sup>:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = -\delta \Pi. \quad (3)$$

现在我们来看除由势  $\Pi$  所确定的有势力而外, 系统上还作用有非有势力

$$\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(t, q_j, \dot{q}_j) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4)$$

时的一般情形。此时

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i, \quad (5)$$

拉格朗日方程取如下形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (6)$$

令  $E$  表示总能量, 它等于势能与动能之和:

①, 例如, 函数  $G_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 有連續的一阶偏导数存在。

② 在計算虛微分  $\delta \Pi$  时, 時間  $t$  是預先固定的。因此,  $\delta \Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i$ 。

$$E = T + \Pi. \quad (7)$$

我們来計算它的导数  $\frac{dE}{dt}$ 。为此, 先来找  $\frac{dT}{dt}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8)$$

注意到  $T = T_2 + T_1 + T_0$ , 并利用拉格朗日方程(6), 便得到①:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1) + \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \tilde{Q}_i \right) \dot{q}_i = \\ &= 2 \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i. \end{aligned} \quad (9)$$

由此根据等式(7)最后就得到

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (10)$$

右端的

$$\sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i dq_i}{dt} = \frac{\delta \tilde{A}}{dt} \quad (11)$$

乃是非有势力  $\tilde{Q}_i (i=1, \dots, n)$  的功率, 而

① 对于  $m$  次齐次函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  有欧拉公式  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = mf$ 。将这公式用于函数  $T_1$  和  $T_2$  即得:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_1}{\partial q_i} \dot{q}_i = T_1.$$

也可以由第 38 頁上所导出的关于  $T_2$  和  $T_1$  的表达式直接来验证这些恒等式的正确性。



$$\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12)$$

仅对于非平稳系统才异于零（对于平稳系统  $T_1 = T_0 = 0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ）。

在势能  $\Pi$  明显地依赖于时间的情况下，最后一项也不等于零。

公式(10)决定了任意非平稳系统在运动时总能量的变化。下面我们来考查几种特殊情况：

a) 平稳系统。这时

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (13)$$

b) 平稳系统，且势能不显含时间。这时

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i. \quad (14)$$

对于这种系统，总能量对时间的导数等于非有势力的功率。

c) 保守系统，即：1)系统是平稳的；2)所有的力均是有势的；3)势能  $\Pi$  不明显地依赖于时间。根据等式(10)，对于保守系统则有：

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (15)$$

即对于系统的任何运动都有

$$E = \text{const} = h. \quad (16)$$

保守系统的总能量在运动中不变。

等式(16)称为能量积分。

如果非有势力的功率等于零：

$$\sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0, \quad (17)$$

則称其为迴轉仪力，而当其功率小于或等于零时<sup>①</sup>：

$$\sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i \leq 0, \quad (18)$$

則称之为耗散力。如果势能不显含  $t$ ，則由等式 (14) 和 (17) 得

$\frac{dE}{dt} = 0$ ，因此，对于在迴轉仪力作用下的平稳系統仍然有能量积分

$$E = \text{const.}$$

如果在这样的系統上还作用有耗散力，則在系統运动时

$$\frac{dE}{dt} \leq 0,$$

即总能量在运动过程中减小<sup>②</sup>。在这种情况下，我們將系統本身称为耗散的。

① 在平稳系統的情况下，

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v d\mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n Q_i dq_i.$$

以  $dt$  除上式各項則得：

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \mathbf{v}_v = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i. \quad (*)$$

因此，等式 (17) 表示出非有势力是迴轉仪力的条件

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \mathbf{v}_v = 0,$$

而等式 (18) 則表示了耗散条件

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \mathbf{v}_v \leq 0.$$

在非平稳系統的情况下，等式 (\*) 不成立。这时  $\delta \mathbf{r}_v = d\mathbf{r}_v - \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} dt$ ，由等式

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \text{ 得 } \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \left( \mathbf{v}_v - \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right) = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i.$$

② 有耗散力作用的情况下，发生能量消散(耗散)。这也正是“耗散力”这个名詞的由来。

在关系式(17)和(18)中广义力  $\tilde{Q}_i$  与广义速度有关。我們来看几个重要的特殊情形, 在这些特殊情形中, 广义力和广义速度的关系是綫性齐次的。

1°. 令

$$\tilde{Q}_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \dot{q}_k \quad (i=1, \dots, n), \quad (19)$$

并設其系数矩陣  $\|\gamma_{ik}\|$  是反对称的:

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} \quad (i, k=1, \dots, n) \textcircled{1}. \quad (20)$$

此时, 力(19)是迴轉仪力。

事实上, 在这种情况下,

$$\sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^n \gamma_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \sum_{i=1}^n \gamma_{ii} \dot{q}_i^2 + \sum_{i < k}^{1, \dots, n} (\gamma_{ik} + \gamma_{ki}) \dot{q}_i \dot{q}_k = 0.$$

最后的等式表明系数矩陣  $\|\gamma_{ik}\|$  的反对称性不仅是使作用在平稳系統上的力(19)是迴轉仪力的充分条件, 而且也是必要条件。

**例題 1.** 对于平稳系統, 哥里奥利斯慣性力是迴轉仪力。事实上, 作用在系統  $P_\nu$  点上的哥里奥利斯慣性力由下面的公式确定:

$$\mathbf{F}_\nu = -2m_\nu(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\nu).$$

这里  $m_\nu$  是点  $P_\nu$  的质量,  $\mathbf{v}_\nu$  是它在所討論的非慣性坐标系統中的速度,  $\boldsymbol{\omega}$  則是这个非慣性坐标系統相对于某慣性坐标系統的轉动角速度 ( $\nu = 1, \dots, N$ )。因之,

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \mathbf{v}_\nu = 0.$$

2. 設在有固定点  $O$  的剛体上作用有主矩为  $\mathbf{L}_O = I(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2)$  的一些力, 其中  $I$  是純量,  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$  是物体的角速度。这些力是迴轉仪力, 因为它們的功率等于零:

$$\mathbf{L}_O \boldsymbol{\omega} = 0.$$

① 对于反对称矩陣  $\|\gamma_{ik}\|$ , 恒有  $\gamma_{ii} = 0 (i=1, \dots, n)$ 。

若剛体有动力对称軸,  $I$  是对对称軸的轉动慣量,  $\omega_2$  是繞对称軸的自轉角速度,  $\omega_1$  是进动角速度, 則力矩  $L_O = I(\omega_1 \times \omega_2)$  称为迴轉仪力矩。因此, 构成迴轉仪力矩的力是迴轉仪力<sup>①</sup>。

2°. 令

$$\tilde{Q}_i = - \sum_{k=1}^n b_{ik} \dot{q}_k \quad (i=1, \dots, n), \quad (21)$$

并設其系数矩陣  $\|b_{ik}\|$  是对称的, 即

$$b_{ik} = b_{ki} \quad (i, k=1, \dots, n), \quad (21')$$

而且二次型  $\sum_{i,k=1}^n b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$  是正的, 即

$$\sum_{i,k=1}^n b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \geq 0. \quad (22)$$

于是, 对于平稳系統, 力  $\tilde{Q}_i$  的功率等于

$$\sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i = - \sum_{i,k=1}^n b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \leq 0, \quad (23)$$

即  $\tilde{Q}_i$  是耗散力。

此时, 二次型

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (24)$$

称为瑞利耗散函数。不难看出, 广义力(21)可由瑞利耗散函数按如下公式求得:

$$\tilde{Q}_i = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (25)$$

若系統是平稳的, 且势能不显含時間, 則由等式(14), (23)和(25)便有

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \dot{q}_i = -2R. \quad (26)$$

① 此即“迴轉仪力”一詞之由来。

上式指出了瑞利函数的物理意义：总能量的减小速度等于瑞利函数的二倍。

如果瑞利函数(24)是广义速度的正定二次型，那我们就说能量完全耗散。此时，我们将系统称之为定耗散系统。按公式(26)，这种系统的总能量是严格递减的。

作为一个例子，我们来看作用在系统各质点上与其速度一次方成正比的介质阻力：

$$F_v = -\beta v_v \quad (v = 1, \dots, N). \quad (27)$$

此时

$$\sum_{v=1}^N F_v v_v = -2R, \quad (28)$$

其中

$$R = \frac{1}{2} \beta \sum_{v=1}^N v_v^2. \quad (29)$$

### § 9. 机电模拟

在这一节中我们将指出，怎样才能使分析力学方程不仅能够用于机械系统，而且也能用于电的和机电的系统。

我们来看一个由电感  $L$ 、电阻  $R$  和电容  $C$  串联而成的电路(图 25)。电路中各元件上的电压  $u$  (元件两端的电势差) 和电流  $i$  ( $i = \frac{dq}{dt}$ ,  $q$  是荷电量) 之间的关系分别为：

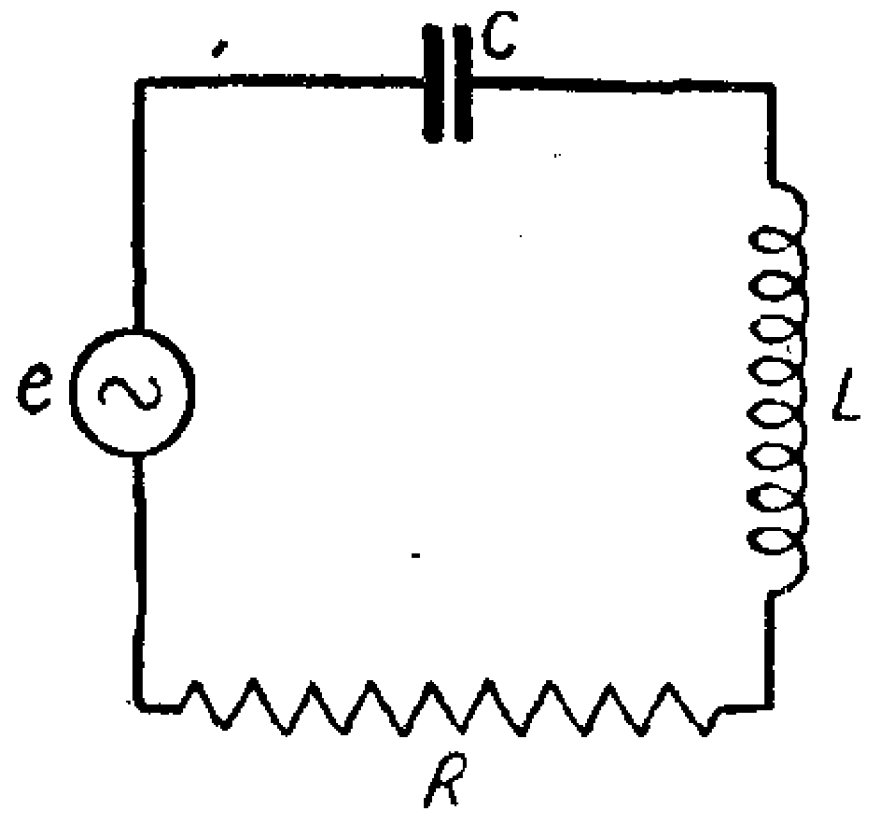


图 25.

$$u = L \frac{di}{dt}, \quad u = Ri, \quad u = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (1)$$

如果在电路中还有电动势为  $e(t)$  的外电源，则(1)使电动势之值等于各元件电压之和即得：

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e(t), \quad (2)$$



或

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e(t). \quad (3)$$

这个方程乃是对机械振动方程

$$a \frac{d^2 q}{dt^2} + b \frac{dq}{dt} + cq = Q(t) \quad (4)$$

的模拟。这里电感  $L$  相当于惯性系数(广义质量)  $a$ , 电阻  $R$  相当于耗散系数  $b$ , 系数  $\frac{1}{C}$  ( $C$  是电容) 相当于弹性系数  $c$ , 电量  $q$  对应于广义坐标  $q$ , 电动势  $e(t)$  对应于广义力  $Q(t)$ 。

另一方面, 在图 26 所示的电路中, 通过电感、电阻和电容的电流将汇入一路, 因此

$$\frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} = \dot{i}(t). \quad (5)$$

将上式逐项微分即得:

$$C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} u = \frac{di}{dt}.$$

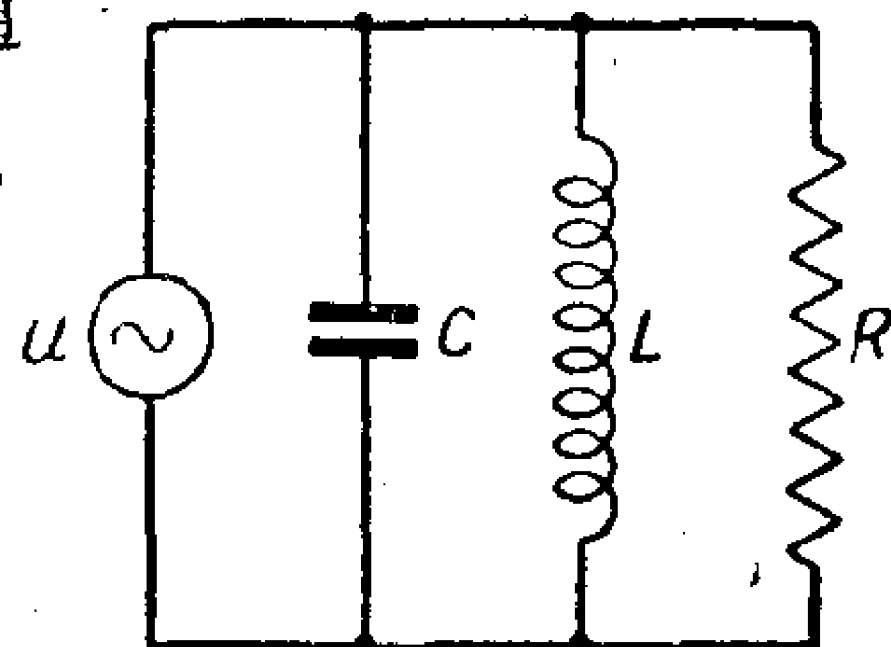


图 26.

这里, 我们得到了另一个模拟系统, 在这个系统中, 与坐标  $q$  对应的是电压  $u$ , 力学系数  $a, b, c$  被  $C, \frac{1}{R}, \frac{1}{L}$  所代替; 而广义力  $Q(t)$  则相当于量  $\frac{di}{dt}$ 。

具有同一方程(准确到符号)的二个电学系统乃是同一个机械系统的二个不同的电学模型。

一自由度机械系统的动能、瑞利函数、势能和广义力

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \tilde{R} = \frac{1}{2} b \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad Q = Q(t)$$

在第一个模拟系统中对应的是

$$T = \frac{1}{2} L \dot{q}^2, \quad \tilde{R} = \frac{1}{2} R \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2C} q^2, \quad e = e(t),$$

而在第二个模拟系统中则是

$$T = \frac{1}{2} C \dot{u}^2, \quad \tilde{R} = \frac{1}{2R} \dot{u}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2L} u^2, \quad \frac{di}{dt}.$$

因此, 机电模拟系统可由下表确定:

机械系统: $q$	$a$	$b$	$c$	$Q$	$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$	$\tilde{R} = \frac{1}{2} b \dot{q}^2$	$\Pi = \frac{1}{2} c q^2$
第一模拟系统: $q$	$L$	$R$	$\frac{1}{C}$	$e$	$\frac{1}{2} L \dot{q}^2$	$\frac{1}{2} R \dot{q}^2$	$\frac{1}{2C} q^2$
第二模拟系统: $u$	$C$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{di}{dt}$	$\frac{1}{2} C \dot{u}^2$	$\frac{1}{2R} \dot{u}^2$	$\frac{1}{2L} u^2$

作为一个比较复杂的例子, 我们来看图 27 上所画的这个电路。

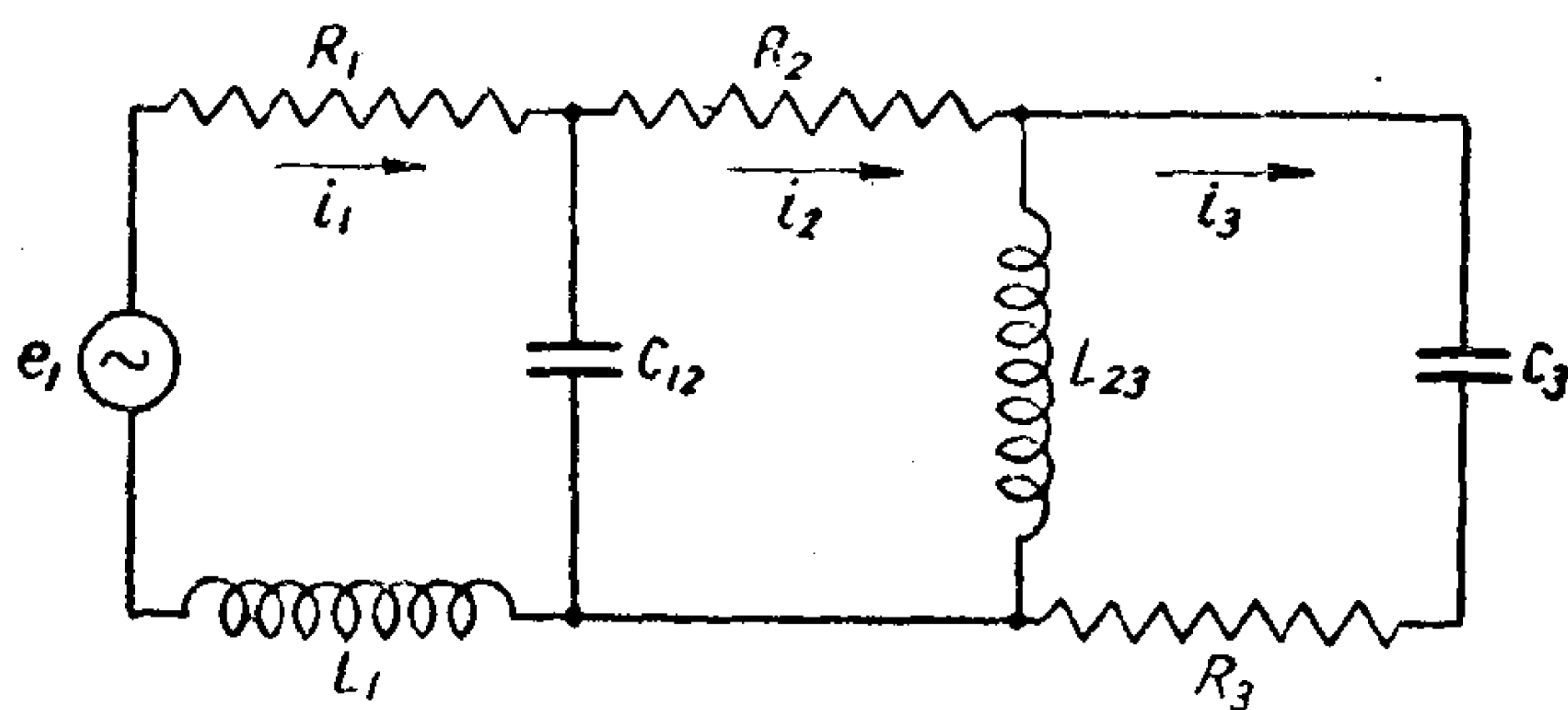


图 27.

我们按第一个模拟系统写拉格朗日方程; 先来计算如下的量:

$$T = \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} L_{23} (\dot{q}_2 - \dot{q}_3)^2,$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} R_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} R_3 \dot{q}_3^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2C_3} q_3^2 + \frac{1}{2C_{12}} (q_1 - q_2)^2.$$

此外,  $e_2 = e_3 = 0$ 。我们还假定

$$e_1 = A \sin \Omega t.$$

于是, 得拉格朗日方程如下:

$$\begin{aligned}
L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_{12}} q_1 - \frac{1}{C_{12}} q_2 &= A \sin \Omega t, \\
L_{23} \ddot{q}_2 - L_{23} \ddot{q}_3 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_{12}} q_2 - \frac{1}{C_{12}} q_1 &= 0, \\
L_{23} \ddot{q}_3 - L_{23} \ddot{q}_2 + R_3 \dot{q}_3 + \frac{1}{C_3} q_3 &= 0.
\end{aligned}$$

这些方程正是图 27 上的电路的方程。

### § 10. 非完整系统的阿沛尔方程·伪坐标

在本节中我们将导出确定非完整系统运动的阿沛尔方程。假设在非完整系统上加有  $d$  个有限约束和  $g$  个微分约束(见 § 1)。我们先利用  $d$  个有限约束将系统各点的矢径以  $m(=3N-d)$  个独立坐标  $q_1, \dots, q_m$  和时间  $t$  表示出来:

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t, q_1, \dots, q_m) \quad (\nu=1, \dots, N). \quad (1)$$

由此即得:

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \quad (\nu=1, \dots, N), \quad (2)$$

$$\delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \quad (\nu=1, \dots, N). \quad (2')$$

但是,  $\mathbf{r}_\nu$  和  $\dot{\mathbf{r}}_\nu$  ( $\nu=1, \dots, N$ ) 还要满足微分约束<sup>①</sup>:

$$\sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \dot{\mathbf{r}}_\nu + D_\beta = 0 \quad (\beta=1, \dots, g), \quad (3)$$

式中  $l_{\beta\nu}$  和  $D_\beta$  都是  $t$  和  $\mathbf{r}_\nu$  ( $\nu=1, \dots, N$ ) 的函数。

将  $\mathbf{r}_\nu$  和  $\dot{\mathbf{r}}_\nu$  的表达式(1)和(2)代入约束方程(3), 并将这些方程写成如下的形式:

---

① 将函数(1)代入有限约束方程, 则有限约束方程变为恒等式。因此, 在引入了表达式(1)之后, 就应当仅只考虑微分约束。

$$\sum_{i=1}^m A_{\beta i} \dot{q}_i + A_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, g), \quad (4)$$

式中  $\dot{q}_i$  的系数  $A_{\beta i}$  和自由项  $A_{\beta}$  都是  $t$  和  $q_1, \dots, q_m$  的函数。

因此, 对非完整系统, 坐标  $q_1, \dots, q_m$  可以取任何值。但是, 广义速度  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$  在此却不能任意。它们之间以关系式(4)相互制约。现在假设形如(4)式的  $g$  个约束是独立的, 于是, 可由方程(4)将广义速度中的某  $g$  个, 例如  $\dot{q}_{n+1}, \dots, \dot{q}_m$  通过其余的  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  ( $n = m - g = 3N - d - g$  是系统的自由度; 见第8页)来表示。对于速度  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ , 可以给任何值, 而且一经给定, 其余速度也随之被决定。

但是, 按照更为一般的方法, 我们不取  $n$  ( $n$  是自由度) 个广义速度作独立量, 而是取这些速度的某  $n$  个独立线性组合<sup>①</sup>:

$$\dot{\pi}_s = \sum_{i=1}^m f_{si} \dot{q}_i \quad (s = 1, \dots, n) \quad (5)$$

作为独立量, 其中  $f_{si}$  是  $t$  和  $q_1, \dots, q_m$  的函数。

对于线性型(5), 只需要加上一个条件: 这  $n$  个线性型和  $g$  个线性型

$$\sum_{i=1}^m A_{\beta i} \dot{q}_i \quad (\beta = 1, \dots, g)$$

应构成一个具有  $m (= n + g)$  个线性无关型的完全组, 即这  $m$  个线性型的系数行列式应异于零。如此, 则量  $\dot{\pi}_s (s = 1, \dots, n)$  便可以取任何值, 因为对于这些量的任何值, 我们都可以由线性方程组(4)和(5)解出与之对应的  $\dot{q}_i (i = 1, \dots, m)$  来, 而且

$$\dot{q}_i = \sum_{s=1}^n h_{is} \dot{\pi}_s + h_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (6)$$

<sup>①</sup> 为方便计, 我们将线性组合(5)记作  $\dot{\pi}_s$ , 虽然符号  $\pi_s$  本身可能没有意义, 因为等式(5)的右端可能不是全导数。

其中  $h_{is}$  和  $h_i$  都是  $t$  和  $q_1, \dots, q_m$  的函数。

我們把作为广义速度綫性型的量  $\dot{\pi}_s$  称之为伪速度，而把符号  $\pi_s$  則称之为伪坐标 ( $s=1, \dots, n$ )。特別是  $\dot{\pi}_s$  可以就是某些广义速度。在一般情形， $m+n$  个量  $\dot{\pi}_s$  和  $\dot{q}_i$  則以关系式(5)和(6)相互关联。

为了得到微分約束加在虛位移  $\delta q_i$  上的限制，应当在方程(4)中去掉自由項  $A_\beta$  并将  $\dot{q}_i$  代之以  $\delta q_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) (見 § 2)。如此，我們便得到：

$$\sum_{i=1}^m A_{\beta i} \delta q_i = 0 \quad (\beta=1, \dots, g). \quad (4')$$

按照等式(5)引入如下符号①：

$$\delta \pi_s = \sum_{i=1}^m f_{si} \delta q_i \quad (s=1, \dots, n). \quad (5')$$

如前所述，型(4')和(5')是綫性无关的。因此， $\delta \pi_s$  可以取任何值，而对应的  $\delta q_i$  則可由方程組(4')和(5')来确定：

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^n h_{is} \delta \pi_s \quad (i=1, \dots, m). \quad (6')$$

力在虛位移上的元功表达式可以写成如下形式：

$$\delta A = \sum_{i=1}^m Q_i \delta q_i, \quad (7)$$

一如完整系統那样，式中

$$Q_i = \sum_{v=1}^N F_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, m).$$

現在將  $\delta q_i$  的表达式(6')代入等式(7)，便得到

① 在平穩系統情況下， $\delta q_i = dq_i = \dot{q}_i dt$ ，因之，根据公式(5)和(5')当有  $\delta \pi_s = \dot{\pi}_s dt$ 。



$$\delta A = \sum_{i=1}^m Q_i \sum_{s=1}^n h_{is} \delta \pi_s = \sum_{s=1}^n \left( \sum_{i=1}^m h_{is} Q_i \right) \delta \pi_s,$$

即

$$\delta A = \sum_{s=1}^n \Pi_s \delta \pi_s, \quad (8)$$

其中

$$\Pi_s = \sum_{i=1}^m h_{is} Q_i = \sum_{i=1}^m \sum_{\nu=1}^N h_{is} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} F_\nu \quad (s=1, \dots, n). \quad (9)$$

我们将  $\Pi_s$  叫作对应于伪坐标  $\pi_s$  的广义力 ( $s=1, \dots, n$ )。

另一方面, 将  $\dot{q}_i$  的表达式(6)代入等式(2), 则得:

$$\dot{r}_\nu = \sum_{s=1}^n e_{\nu s} \dot{\pi}_s + e_\nu \quad (\nu=1, \dots, N), \quad (10)$$

其中  $e_{\nu s}$  和  $e_\nu$  ( $\nu=1, \dots, N$ ;  $s=1, \dots, n$ ) 都是  $t$  和  $q_1, \dots, q_m$  的矢量函数。

由等式(10)即可得到①:

$$\delta r_\nu = \sum_{s=1}^n e_{\nu s} \delta \pi_s \quad (\nu=1, \dots, N) \quad (11)$$

和

$$\ddot{r}_\nu = \sum_{s=1}^n e_{\nu s} \ddot{\pi}_s + \dots \quad (\nu=1, \dots, N); \quad (12)$$

这里, 公式(12)的右端只写出了包含伪加速度  $\ddot{\pi}_s$  ( $s=1, \dots, n$ ) 的各项。

利用等式(8)和(11)将动力学普遍方程

① 量  $\dot{r}_\nu$ ,  $\dot{\pi}_s$  和  $\dot{q}_i$  以关系式(2), (4)和(5)相互联系着。由这些关系式中消去  $\dot{q}_i$  便得到公式(10)。但由于量  $\delta r_\nu$ ,  $\delta \pi_s$  和  $\delta \dot{q}_i$  所满足的齐次关系式(2'), (4'), 和(5')与关系式(2), (4)和(5)的差别仅仅是没有自由项, 所以, 作为由关系式(2'), (4')和(5')消去  $\delta \dot{q}_i$  而得到的结果, 公式(11)可以由公式(10)将  $\dot{r}_\nu$  代之以  $\delta r_\nu$ , 将  $\dot{\pi}_s$  代之以  $\delta \pi_s$ , 并去掉自由项  $e_\nu$  而得到。

$$\delta A - \sum_{v=1}^N m_v \ddot{\mathbf{r}}_v \delta \mathbf{r}_v = 0 \quad (13)$$

写成如下形式:

$$\sum_{s=1}^n \left( \Pi_s - \sum_{v=1}^N m_v \ddot{\mathbf{r}}_v \mathbf{e}_{vs} \right) \delta \pi_s = 0. \quad (14)$$

因为  $\delta \pi_s$  是完全任意的, 所以由此得到:

$$\sum_{v=1}^N m_v \ddot{\mathbf{r}}_v \mathbf{e}_{vs} = \Pi_s \quad (s=1, \dots, n). \quad (15)$$

现在引入“加速度能”:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \ddot{\mathbf{r}}_v^2 = U(t, q_i, \dot{\pi}_s, \ddot{\pi}_s). \quad (16)$$

注意到根据公式(12)

$$\mathbf{e}_{vs} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_v}{\partial \ddot{\pi}_s} \quad (v=1, \dots, N; s=1, \dots, n), \quad (17)$$

我们便可以将方程(15)写成如下形式:

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{\pi}_s} = \Pi_s \quad (s=1, \dots, n). \quad (18)$$

方程(18)曾首次由阿沛尔得到, 称之为阿沛尔方程。  
这  $n(=3N-d-g)$  个微分方程和  $g$  个约束方程

$$\sum_{i=1}^m A_{\beta i} \dot{q}_i + A_\beta = 0 \quad (\beta=1, \dots, g) \quad (19)$$

以及  $n$  个微分关系式

$$\dot{\pi}_s = \sum_{i=1}^m f_{si} \dot{q}_i \quad (20)$$

一起构成一个确定非完整系统运动的微分方程组。

现在将阿沛尔方程写成展开形式。为此, 将  $\ddot{\mathbf{r}}_v$  的表达式(12)代入公式(15)。于是, 得到:

$$\sum_{s=1}^n u_{\rho s} \ddot{\pi}_s + (**) = \Pi_{\rho} \quad (\rho = 1, \dots, n), \quad (21)$$

式中

$$\Pi_{\rho} = \Pi_{\rho}(t, q_i, \dot{\pi}_s), \quad u_{\rho s} = u_{\rho s}(t, q_i) = \sum_{v=1}^N m_v e_{vs} e_{v\rho} \quad (22)$$

$$(\rho, s = 1, \dots, n).$$

方程(21)中的(\*\*)表示那些不包含伪加速度  $\ddot{\pi}_s (s = 1, \dots, n)$  的諸項。

可以证明  $u_{\rho s}$  的系数行列式不恒等于零:

$$\det(u_{\rho s})_{\rho, s=1}^n \neq 0 \textcircled{1}. \quad (23)$$

因此, 可以就方程(21)解出伪加速度:

$$\ddot{\pi}_s = H_s(t, q_i, \dot{\pi}_\rho) \quad (s = 1, \dots, n). \quad (24)$$

另一方面, 关系式(19)和(20)也可以写成就  $\dot{q}_i (i = 1, \dots, m)$  解出的形式[見公式(6)]。

因此, 非完整系统的运动由未知函数  $q_1, \dots, q_m, \dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_n$  的一组  $n+m$  个一阶微分方程所决定, 而且这些方程可就其导数解出。因之, 初始数据  $q_1^0, \dots, q_m^0, \dot{\pi}_1^0, \dots, \dot{\pi}_n^0$  唯一地决定了系统的运动。而系统任何为约束所容许的初始位置和初始速度也都可以按公式(1)和(6)借助于这些初始数据来给出。因此, 給非完整系统一与有限约束和微分约束不矛盾的初始位置和初始速度, 就唯一地决定了这个系统的运动。

注 1. 在特殊情况下, 如果取  $n$  个独立的广义速度, 例如  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  作伪速度, 则为了决定对应的广义力  $Q_1^*, \dots, Q_n^*$  就应当将等式(7)中的  $\delta q_{n+1}, \dots, \delta q_m$  用  $\delta q_1, \dots, \delta q_n$  来表示:

$$\delta A = \sum_{i=1}^m Q_i \delta q_i = \sum_{s=1}^n Q_s^* \delta q_s. \quad (25)$$

① 在个别点上这个行列式可能等于零。在討論中我們不考慮这些奇异点。不等式(23)的证明和第 39—40 頁上关于不等式  $\det(a_{ik})_{i,k=1}^n \neq 0$  的证明相似。

在这种情况下, 加速度能  $U$  就可以写成函数  $B(t, q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n)$  的形式, 而阿沛尔方程取如下形式:

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s^* \quad (s=1, \dots, n). \quad (26)$$

注 2. 特别是阿沛尔方程也可以用于完整系统。此时, 所有的速度  $\dot{q}_i$  都是独立的, 而且  $Q_i = Q_i^* (i=1, \dots, n)$ ; 而方程(26)是第二类拉格朗日方程的另一种写法①。

例题 1. 我们用阿沛尔方程来求 § 3 例题(见第 16 页)所描述的运动。这个例子将使读者可以就求解非完整系统运动的二种方法——拉格朗日乘子法和阿沛尔方程——进行比较, 并从中看出第二种方法的优越性。取杆子的中点坐标  $x, y$  和  $M_1 M_2$  与水平轴  $x$  间的夹角  $\varphi$  作独立坐标(见图 28), 则

$$x_1 = x - \frac{l}{2} \cos \varphi, \quad x_2 = x + \frac{l}{2} \cos \varphi,$$

$$y_1 = y - \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad y_2 = y + \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

在新坐标中微分约束的方程取如下形式:

$$\frac{\dot{x}}{\cos \varphi} = \frac{\dot{y}}{\sin \varphi}.$$

不难看出, 加速度能  $U$  可以按如下形式表示:

$$U = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{y}_2^2) = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \frac{1}{4}l^2(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4).$$

引入伪速度  $\pi$ , 令

$$\dot{x} = \pi \cos \varphi, \quad \dot{y} = \pi \sin \varphi.$$

则得

$$U = \pi^2 + \frac{1}{4}l^2\ddot{\varphi}^2 + \dots,$$

式中未予写出的各项都不包含加速度。现在来决定广义力。由元功表达式

$$\delta A = \Pi \delta \pi + \Phi \delta \varphi = -2g \delta y = -2g \sin \varphi \delta \pi,$$

便得到

① 但是, 将伪坐标形式的阿沛尔方程用于完整系统时就会给出运动方程的另一型式。

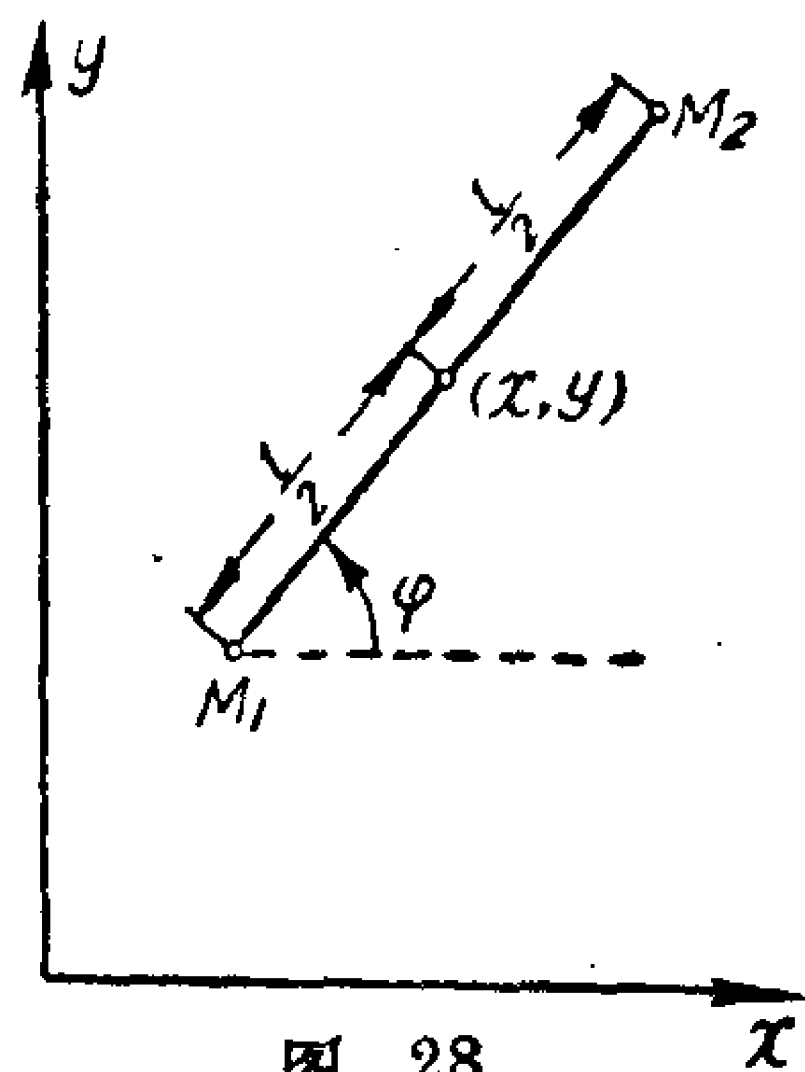


图 28.

$$\Pi = -2g \sin \varphi, \quad \Phi = 0.$$

阿沛尔方程为:

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{\pi}} = \Pi, \quad \frac{\partial U}{\partial \ddot{\varphi}} = \Phi.$$

在所给情况下, 这些方程都不包含坐标  $x, y$ , 而且具有如下的形式:

$$\ddot{\pi} = -g \sin \varphi, \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

将上式积分之, 便得到:

$$\varphi = \alpha t + \beta,$$

$$\frac{d\dot{\pi}}{d\varphi} = \frac{1}{\alpha} \ddot{\pi} = -\frac{g}{\alpha} \sin \varphi, \quad \dot{\pi} = \frac{g}{\alpha} \cos \varphi + \gamma.$$

现在来求  $x$  和  $y$ :

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{\alpha} \dot{x} = \frac{1}{\alpha} \dot{\pi} \cos \varphi = \frac{g}{\alpha^2} \cos^2 \varphi + \frac{\gamma}{\alpha} \cos \varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\alpha} \dot{y} = \frac{1}{\alpha} \dot{\pi} \sin \varphi = \frac{g}{\alpha^2} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\gamma}{\alpha} \sin \varphi.$$

由此得到

$$x = \frac{g}{2\alpha^2} \varphi + \left( \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{g}{2\alpha^2} \cos \varphi \right) \sin \varphi + \delta,$$

$$y = -\left( \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{g}{2\alpha^2} \cos \varphi \right) \cos \varphi + \varepsilon.$$

将  $\varphi$  代之以  $\alpha t + \beta$ , 便得到有限形式的运动方程, 它包含五个任意常数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  和  $\varepsilon$ :

$$x = \frac{g}{2\alpha^2} (\alpha t + \beta) + \left[ \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{g}{2\alpha^2} \cos (\alpha t + \beta) \right] \sin (\alpha t + \beta) + \delta,$$

$$y = -\left[ \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{g}{2\alpha^2} \cos (\alpha t + \beta) \right] \cos (\alpha t + \beta) + \varepsilon, \quad \varphi = \alpha t + \beta.$$

2. 我们来看怎样由阿沛尔方程得到有固定点  $O$  的刚体的欧拉动力学方程。

令  $p, q, r$  分别表示角速度  $\omega$  在惯性主轴  $O\xi, O\eta, O\zeta$  上的投影。如所周知, 这些投影是广义速度  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$  的线性组合, 其中  $\psi, \theta, \varphi$  是欧拉角 (见第 28—29 页) ①。因此, 可以取  $p, q, r$  作为三个伪速度。现在来计算加速度能 ②:

① 将矢量等式  $\omega = \omega_\psi + \omega_\theta + \omega_\varphi$  在坐标轴上逐项投影即得  $p, q, r$  的表达式, 其中  $\omega_\psi = \dot{\psi}$ ,  $\omega_\theta = \dot{\theta}$ ,  $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$ 。

② 这里我们利用了著名的恒等式:

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = 0;$$

其左端最后一项是等于零的, 因为  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ 。公式 (27) 中未写出的诸项均不包含角加速度  $\varepsilon$ 。

$$\begin{aligned}
2U &= \int w^2 dm = \int (\epsilon \times r + \omega \times v)^2 dm = \\
&= \int (\epsilon \times r)^2 dm + 2 \int (\epsilon \times r)(\omega \times v) dm + \dots = \\
&= \int (\epsilon \times r)^2 dm + 2\epsilon \int [r \times (\omega \times v)] dm + \dots = \\
&= \int (\epsilon \times r)^2 dm + 2\epsilon \left[ \omega \times \int r \times v dm \right] + \dots \quad (27)
\end{aligned}$$

我們注意,  $\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta\omega}{dt} + \omega \times \omega = \frac{\delta\omega}{dt}$ 。这里  $\frac{d}{dt}$  和  $\frac{\delta}{dt}$  分別表示在固定坐标軸和固联于物体的坐标軸中取微分<sup>①</sup>。因此,  $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$  是角加速度  $\epsilon$  在軸  $O\xi, O\eta, O\zeta$  上的投影。

于是, 仿照动能的表达式<sup>②</sup>

$$2T = \int (\omega \times r)^2 dm = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

( $A, B, C$  是对慣性主軸  $O\xi, O\eta, O\zeta$  的轉动慣量) 便可以得到:

$$\int (\epsilon \times r)^2 dm = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2.$$

另一方面, 动量矩  $\mathbf{G} = \int r \times v dm$  的分量为  $Ap, Bq, Cr$ 。因之, 最后我們便得到  $2U$  的表达式如下:

$$2U = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 + 2[(C-B)qr\dot{p} + (A-C)rp\dot{q} + (B-A)pq\dot{r}] + \dots.$$

另外, 对于外力的元功, 我們有

$$\delta A = L_o \omega dt = L_\xi p dt + L_\eta q dt + L_\zeta r dt.$$

于是, 由阿沛尔方程直接得欧拉方程如下:

$$\begin{aligned}
A \frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= L_\xi, \\
B \frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= L_\eta, \\
C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= L_\zeta.
\end{aligned}$$

① 参考, 例如, Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Курс теоретической механики, 1954, 第一卷, § 73. (有中譯本)

② 参考 Сулов Г. К., Теоретическая механика, М.-Л., 1944, § 259.



## 第二章 势場中的运动方程

### § 11. 有势力情况下的拉格朗日方程 · 广义势 · 非自然系統

假設广义力  $Q_i$  是有势的, 即假設存在力的势(势能)  $\Pi = \Pi(t, q_i)$  (見§ 8), 而且

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

于是, 拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

可以写成如下的形式<sup>①</sup>:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2)$$

其中

$$L = T - \Pi. \quad (3)$$

函数  $L$  称为拉格朗日函数或动势。

动势  $L$  和动能  $T$  一样, 也是广义速度的二次函数:

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \quad (4)$$

其中

$$L_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad L_1 = \sum_{i=1}^n c_i \dot{q}_i, \quad L_0 = c_0. \quad (4')$$

这里的系数  $c_{ik}$ ,  $c_i$ ,  $c_0$  都是坐标  $q_1, \dots, q_n$  和时间  $t$  的函数 ( $i, k =$

---

① 因为势能  $\Pi$  不依赖于广义速度, 而  $L = T - \Pi$ , 所以,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

$= 1, \dots, n$ )。将公式(3)和第 38 頁上的公式(5)加以比較便得到:

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi. \quad (5)$$

注意: 当作用在质点上的主动力  $\mathbf{F}_v = X_v \mathbf{i} + Y_v \mathbf{j} + Z_v \mathbf{k}$  ( $v = 1, \dots, N$ ) 在笛卡尔坐标  $x_v, y_v, z_v$  ( $v = 1, \dots, N$ ) 中有势  $\Pi(t, x_v, y_v, z_v)$  时, 即

$$X_v = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_v}, \quad Y_v = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_v}, \quad Z_v = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_v} \quad (v = 1, \dots, N),$$

这些力在独立坐标  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 中也有势 (相反的結論在一般情况下并不成立!), 而且仍是同一个势  $\Pi$ , 只不过是坐标  $q_1, \dots, q_n$  和时间  $t$  表示罢了。事实上,

$$\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \sum_{v=1}^N (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v) = -\delta \Pi = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i,$$

由此立即可得等式(1)。

我們現在抛开通常的势  $\Pi(t, q_i)$  来討論存在广义势  $V(t, q_k, \dot{q}_k)$  的情形。这时广义力  $Q_i$  可借如下的公式通过它来表示:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6)$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

仍然可以写成如(2)的形式, 只要令

$$L = T - V. \quad (7)$$

由公式(6)得:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + (**) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (8)$$

其中(\*\*)表示那些不包含广义加速度  $\ddot{q}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) 的各项之和。

由于我們在力学中仅討論广义力  $Q_i$  不显含广义加速度而只与时间、坐标和广义速度有关的那种情况, 即

$$Q_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (9)$$

所以, 按公式(8), 此时  $V$  对广义速度的二阶偏导数全都应当恒等

于零,即广义势  $V$  綫性地依赖于广义速度:

$$V = \sum_{i=1}^n \Pi_i \dot{q}_i + \Pi = V_1 + \Pi, \quad (10)$$

其中  $\Pi_i (i=1, \dots, n)$  和  $\Pi$  都是坐标  $q_1, \dots, q_n$  和时间  $t$  的函数。因而,由等式(7),  $L$  仍然是速度  $\dot{q}_i$  的二次函数,而且,代替等式(5)有<sup>①</sup>:

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi. \quad (11)$$

将  $V$  的表达式(10)代入公式(6),我們便得到:

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{d\Pi_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i} \left[ \sum_{k=1}^n \Pi_k \dot{q}_k + \Pi \right] = \\ &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial \Pi_i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (12)$$

公式(12)表明,当广义势的綫性部分  $V_1$  不显含时间  $t$  时  $\left[ \frac{\partial \Pi_i}{\partial t} = 0 (i=1, \dots, n) \right]$ , 广义力  $Q_i$  由有势力  $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} (i=1, \dots, n)$

和迴轉仪力

$$\tilde{Q}_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \dot{q}_k \quad (i=1, \dots, n) \quad (13)$$

之和組成,其中

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi_k}{\partial q_i} \quad (i, k=1, \dots, n). \quad (13')$$

由如下的例子可以見出討論广义势的重要性。

**例題.** 电磁場中的点电荷上作用有勞倫茲力

① 在  $L$  和  $T$  的表达式中,它們的系数是相互有关的。事实上,在普通势的情形  $c_i = a_i$ , 而在广义势的情形下,則有  $c_i = a_i - \Pi_i (i=1, \dots, n)$ 。在两种情况下,都有  $c_{ik} = a_{ik} (i, k=1, \dots, n)$ ,  $c_0 = a_0 - \Pi$  以及  $L_2 = T_2$  —— 正定二次型。

$$\mathbf{F} = e \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right], \quad (14)$$

其中  $\mathbf{v}$  是点电荷的速度,  $e$  是荷电量,  $c$  是光速, 而  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  是电场和磁场的强度。矢量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  可以分别通过标量势  $\varphi$  和矢量  $\mathbf{A}$  用如下公式来表示①

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (15)$$

我们来找劳伦兹力  $\mathbf{F}$  的广义势。

由公式(14)和(15)得②:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -e \text{grad } \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}) = \\ &= -e \text{grad } \varphi - \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{e}{c} [(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}] = \\ &= -e \text{grad } \varphi - \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{e}{c} \text{grad}(\mathbf{v} \mathbf{A}), \end{aligned} \quad (16)$$

这里,  $\text{grad}(\mathbf{v} \mathbf{A})$  中的速度  $\mathbf{v}$  被看作与场中各点无关的矢量。

因此取点的笛卡尔坐标  $x, y, z$  作独立坐标, 并假定

$$V = e\varphi - \frac{e}{c} (\mathbf{v} \mathbf{A}), \quad (17)$$

即

$$V = e\varphi - \frac{e}{c} (\dot{x} A_x + \dot{y} A_y + \dot{z} A_z),$$

则得

① 例如见 Ландау Л. Д. 和 Лифшиц Е. М. 著 Теория поля, М.—Л., 1948, 第 55 页(有中译本)。

② 对于表达式  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} = v_x \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$ , 我们在这里利用了著名的矢量分析公式

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A} = \text{grad}(\mathbf{v} \mathbf{A}),$$

其中  $\mathbf{v}$  被看作常矢量。比较上式两端在  $x, y, z$  轴上的投影便不难看出这个公式的正确性。事实上, 对于  $x$  轴有

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \\ - v_z \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \mathbf{A}). \end{aligned}$$

在  $y$  轴和  $z$  轴上投影可以得到类似的公式。

$$F_x = -\frac{e}{c} \frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

对于  $F_y$  和  $F_z$  也有相似的公式。因此，劳伦兹力(14)的广义势由公式(17)确定，而拉格朗日函数  $L$  则有如下的表达式：

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + \frac{e}{c}(\mathbf{v}\mathbf{A}). \quad (18)$$

力在其中具有通常势  $\Pi(t, q_i)$  或广义势  $V(t, q_i, \dot{q}_i)$  的古典系统统称之为自然系统。对于这样的系统，拉格朗日函数  $L$  是广义速度的二次函数，即可以写成表达式(4)的形式，其中  $L_2$  是广义速度的正定二次型。

在力场不存在的情况下，相对论意义下的质点运动可以作为非自然系统的一个例子。此时，质点的运动决定于动势为

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

的拉格朗日方程( $c$  是光速)。这里  $L$  已经不是速度  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  的二次函数了。

如果将  $L$  函数表达式中的  $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$  按  $\frac{v^2}{c^2}$  之幂展成级数，并略去  $\frac{v^2}{c^2}$  的二次以上的项，即，使  $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$ ，我们便得到关于孤立质点的拉格朗日函数的“古典表达式”：

$$\dot{L} = \frac{1}{2}mv^2 + \text{const.}$$

在本章和以下各章我们将就一般形式的系统<sup>①</sup>进行讨论。这种一般形式的系统，其运动是由  $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$  为任意函数的拉格朗日方程决定的。在此将仅假定函数  $L$  关于广义速度的海斯式不恒等于零<sup>②</sup>：

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right)_{i,k=1}^n \neq 0. \quad (19)$$

① 那些仅对自然系统才正确的论断我们将特别予以指出。

② 对于自然系统， $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = a_{ik} (i, k = 1, \dots, n)$ ，按 § 7 (第 39—40 页)

所证，它是满足不等式(19)的。

方程(2)的展开形式可以写成

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + (**) = 0, \quad (20)$$

式中(\*\*)表示那些不包含广义加速度  $\ddot{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的各项之和。由于(关于  $\ddot{q}_k$  的)綫性方程組(20)的系数行列式不为零[見不等式(19)], 所以方程組(20)可以就广义加速度解出, 并写成

$$\ddot{q}_i = G_i(t, q_k, \dot{q}_k) \quad (i=1, \dots, n)$$

的形式。因此, § 7 中关于初始数据  $q_i^0, \dot{q}_i^0$  ( $i=1, \dots, n$ ) 唯一地确定系統运动的結論不仅对于自然系統正确, 而且对于在这里所討論的、形式更为一般的系統也是正确的。

## § 12. 哈密頓正則方程

拉格朗日已向我們指出当已知动势(拉格朗日函数)  $L=L(t, q_i, \dot{q}_i)$  时如何写出系統的运动微分方程。

我們把表示拉格朗日函数的变量  $t, q_i, \dot{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 称之为拉格朗日变量。这些变量的一組值就表示出系統在一定时刻的状态, 即系統的位置及其各点的速度。如象上节末所指出的那样, 給定拉格朗日函数和初始状态就唯一地决定了系統的运动。

哈密頓曾經提出以量  $t, q_i, p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 作为描述系統状态的基本变量, 这里  $p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 是广义冲量, 由下式决定:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (1)$$

变量  $t, q_i, p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 称为哈密頓变量。

因为等式(1)右端关于变量  $\dot{q}_i$  的雅科毕行列式正好就是函数  $L$  的异于零的海斯式[見第 64 頁上的条件(19)], 所以方程(1)可以就  $\dot{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 解出:

$$\dot{q}_i = \Phi_i(t, q_k, p_k) \quad (i=1, \dots, n). \quad (2)$$



因此, 哈密頓变量可以通过拉格朗日变量表出, 拉格朗日变量也可以通过哈密頓变量表出, 而且, 系統的状态既可以用拉格朗日变量的一组值来表示, 也可以用哈密頓变量的一组值来表示。

在自然系統的情形下,  $L$  是广义速度的二次函数(見第 60—62 頁), 因之, 按等式(1), 广义冲量可以通过广义速度綫性地表出:

$$p_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_k + c_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (3)$$

解这个关于  $\dot{q}_i$  的綫性方程組<sup>①</sup>, 則对于  $\dot{q}_i$  仍然得到綫性表达式:

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} p_k + b_i \quad (i=1, \dots, n), \quad (4)$$

式中  $b_{ik}$  和  $b_i$  都是  $t, q_1, \dots, q_n$  的函数。

如果在自然系統中力  $Q_i (i=1, \dots, n)$  具有通常势  $\Pi(t, q_i)$ , 則由等式  $L=T-\Pi$  得<sup>②</sup>

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \quad (5)$$

我們注意, 对于拉格朗日变量的任何函数

$$F = F(t, q_i, \dot{q}_i),$$

当以广义速度  $\dot{q}_i$  的表达式(2)或(4)代入其中时, 它将变为哈密頓变量的某一函数  $\widehat{F}(t, q_i, p_i)$ 。我們將函数  $\widehat{F}(t, q_i, p_i)$  叫作函数  $F(t, q_i, \dot{q}_i)$  的关联表达式。

**例題.** 对于自由质点, 笛卡尔坐标  $x, y, z$  是独立的, 在势場  $\Pi = \Pi(t, x, y, z)$  中拉格朗日函数具有如下形式:

① 一如 § 7 所证,  $\det(a_{ik})_{i,k=1}^n \neq 0$ .

② 当力具有广义势时, 公式(5)不成立。在这情况下[見第 61—62 頁上的等式(7)和(10)]

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \Pi_i \quad (i=1, \dots, n).$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi(t, x, y, z).$$

和笛卡尔坐标相对应的冲量

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}. \quad (6)$$

如果由此解出  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  并将所得表达式代入  $L$ , 我們便得到  $L$  的关联表达式:

$$\widehat{L} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \Pi(t, x, y, z). \quad (7)$$

如果有广义势

$$V = \Pi_1 \dot{x} + \Pi_2 \dot{y} + \Pi_3 \dot{z} + \Pi,$$

代替  $\Pi(t, x, y, z)$  式中  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi$  都是  $t, x, y, z$  的函数, 則由等式

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi_1 \dot{x} - \Pi_2 \dot{y} - \Pi_3 \dot{z} - \Pi$$

便有:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \Pi_1, \quad p_y = m\dot{y} - \Pi_2, \quad p_z = m\dot{z} - \Pi_3, \quad (6')$$

而关联表达式  $\widehat{L}$  有如下形式:

$$\widehat{L} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{2m}(\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2) - \Pi. \quad (7')$$

哈密頓在討論中引入了一个由如下等式所定义的函数  $H(t, q_i, p_i)$ :

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L, \quad (8)$$

或确切地写成

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \widehat{\dot{q}_i} - \widehat{L}, \quad (8')$$

并指出借助于这个函数可以将运动方程写成如下形式的一组  $2n$  个一阶常微分方程:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (9)$$

这些方程称为正則方程或哈密頓方程①。由 (8') 式所定义的函数

① 这些方程的一般形式最先由英国数学家哈密頓(Hamilton W.) 于1834 年得到。

$H(t, q_i, p_i)$  称为哈密顿函数。

哈密顿正则方程可借下述数学定理导出。

唐肯定理①. 假设给定一函数  $X(x_1, \dots, x_n)$ , 它的海斯式不等于零:

$$\det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{i,k=1}^n \neq 0, \quad (10)$$

又设函数  $X(x_1, \dots, x_n)$  “产生”一变量变换:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad (i=1, \dots, n), \quad (11)$$

则必有变换(11)的逆变换存在, 它也是由某个函数  $Y(y_1, \dots, y_n)$  产生的:

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (i=1, \dots, n), \quad (12)$$

而且逆变换的产生函数  $Y$  和正变换的产生函数  $X$  满足如下关系:

$$Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - X. \quad (13)$$

若函数  $X$  包含参数  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , 即

$X = X(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , 则  $Y$  也包含这些参数, 即  $Y = Y(y_1, \dots, y_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , 而且,

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \quad (j=1, \dots, m). \quad (14)$$

**证明.** 函数  $X$  的海斯式和方程(11)右端部分的亚可比式是完全一样的。因此, 条件(10)表明, 由方程(11)可以将变量  $x_1, \dots, x_n$  通过  $y_1, \dots, y_n$  表出:

$$x_i = f_i(y_1, \dots, y_n) \quad (i=1, \dots, n). \quad (15)$$

假设  $Y(y_1, \dots, y_n)$  是由公式(13)所确定的函数, 其中变量  $x_i$

① Philosoph. Trans., 1854. 在唐肯定理中所说的由变量  $x_i$  到变量  $y_i$  的变换( $i=1, \dots, n$ )通常称之为勒襄德变换。

已由其表达式(15)代替, 則

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k - X \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_i} y_k + x_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i}.\end{aligned}$$

但是, 根据等式(11), 上式右端的二个和相互抵消, 因之, 公式(12)成立。

現在假設除变量  $x_1, \dots, x_n$  而外,  $X$  还包含参数  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 。于是, 正变换(11)必将包含这些参数, 因而逆变换也必包含这些参数:

$$x_i = f_i(y_1, \dots, y_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (i=1, \dots, n).$$

将等式(13)所定义的函数  $Y$  中的  $x_i$  代之以  $f_i(y_1, \dots, y_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , 則<sup>①</sup>

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - X \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} = - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \quad (j=1, \dots, m).\end{aligned}$$

唐肯定理证完。

我們將唐肯定理应用到由拉格朗日变量轉換为哈密頓变量的变换上。将定理中的函数  $X$  換成  $L$ , 变量  $x_1, \dots, x_n$  換成  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ , 参数  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  換成  $q_1, \dots, q_n, t$ , 变量  $y_1, \dots, y_n$  換成  $p_1, \dots, p_n$ , 最

后, 将函数  $Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - X$  換成

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L, \text{ 于是, 根据唐肯定理(函数 } L \text{ 关于 } \dot{q}_i (i=1, \dots, n)$$

① 在計算导数  $\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}$  时, 量  $y_1, \dots, y_n$  应看作常量。

的海斯式不等于零!)由公式(1)便得到:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n), \quad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (17)$$

等式(16)和(17)都是恒等式。它們都是关于广义速度和广义冲量之間关系式(1)的推論。但根据(1)式拉格朗日方程可以写成:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (18)$$

这些方程和(16)式一起就使我們得到哈密頓正則方程:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (19)$$

除哈密頓方程而外,我們还得到了恒等式(17),它在今后将被用到。

由方程(19)可得恒等式

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (20)$$

如果哈密頓函数  $H$  不显含時間  $t$ , 即如果

$$H = H(q_i, p_i),$$

則系統被称之为广义保守系統。此时,  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ <sup>①</sup>, 因而, 由恒等式

(20)得  $\frac{dH}{dt} = 0$ , 即在系統运动过程中

$$H(q_i, p_i) = \text{const} = h, \quad (21)$$

其中  $h$  是任意常数。函数  $H$  称为广义总能量, 而关系式(21)称为广义能量积分。

① 由等式(17)可以断定, 对于广义保守系統也有  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , 即  $t$  不显含在拉格朗日函数  $L$  中。

为了說明这个名詞，我們来考察自然系統。在自然系統中  $L$  是二次函数[見 § 11 等式(4)]，即

$$L = L_2 + L_1 + L_0,$$

而

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L_2 - L_1 - L_0. \end{aligned}$$

但根据齐次函数的欧拉定理<sup>①</sup>

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2L_2, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = L_1. \quad (22)$$

因此，对于任何自然系統最后都有

$$H = L_2 - L_0. \quad (23)$$

令  $T = T_2 + T_1 + T_0$ 。如果力具有通常的势  $\Pi = \Pi(t, q_i)$  或广义势  $V = V_1 + \Pi$ ，則  $L_2 = T_2$ ， $L_0 = T_0 - \Pi$ ，因而

$$H = T_2 - T_0 + \Pi. \quad (24)$$

如果系統是平穩的，則  $T = T_2$ ， $T_0 = 0$ ，因而

$$H = T + \Pi. \quad (25)$$

因此，对于平穩的自然系統，哈密頓函数  $H$  乃是以哈密頓变量表示的总能量<sup>②</sup>。

我們現在来看保守系統，即平穩的完整自然系統，且其作用力有不显含時間的通常势。

在这种情况下，時間  $t$  不显含于总能量  $H$  的表达式(25)中，因

① 見第 43 頁上的脚注。

② 当有广义势  $V = V_1 + \Pi$  存在时，我們仍然將量  $T + \Pi$  称为总能量，而不是將  $T + V$  称为总能量。

此, 根據等式(21), 能量守恆定律成立:

$$T + \Pi = h. \quad (26)$$

保守系統是廣義保守系統的特殊情形, 而且在此特殊情形, 廣義能量積分化為通常的能量積分。

如果系統是平穩的, 而且力具有廣義勢  $V = V_1 + \Pi$ , 其中  $\Pi$  不顯含時間  $t$  ( $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ ), 則函數  $H$  仍然由公式(25)確定, 而且不顯含時間  $t$ 。因此, 在這種情況下, 系統是廣義保守系統, 而且有能量積分(26)①。

**例題.** 水平軌道繞鉛直軸轉動, 沿軌道有質量為  $m$  的重物運動。作用在重物上的力有勢  $\Pi(r)$ , 其中  $r$  是重物到轉軸的距離。

以  $\varphi$  表示軌道的轉角, 以  $I = md^2$  表示軌道對鉛直轉軸的轉動慣量。取  $r$  和  $\varphi$  為系統的獨立坐標, 則

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r^2 + d^2) \dot{\varphi}^2].$$

由此得:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2 + d^2)\dot{\varphi}.$$

因為系統是保守的, 所以

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 + d^2} \right) + \Pi(r).$$

在所給情況下, 正則方程有如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{p_r}{m}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{m(r^2 + d^2)}, \\ \frac{dp_r}{dt} &= \frac{r p_\varphi^2}{m(r^2 + d^2)^2} - \Pi'(r), \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = 0, \end{aligned}$$

而能量積分可以寫成:

$$p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 + d^2} + 2m\Pi(r) = h_1 \quad (h_1 = 2mh).$$

① 見第 71 頁的腳注 2。



## § 13. 罗司方程

罗司曾以部分拉格朗日变量和部分哈密顿变量作为描述系统在时刻  $t$  的状态的基本变量。量

$$t, q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha \quad (i=1, \dots, m; \alpha=m+1, \dots, n) \quad (1)$$

称为罗司变量(这里  $m$  是小于  $n$  的任一固定数)。

为使拉格朗日变量化为罗司变量, 应当将全体  $\dot{q}_\alpha$  通过  $p_\alpha (\alpha=m+1, \dots, n)$  来表示。为此, 我们利用如下的关系:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha=m+1, \dots, n). \quad (2)$$

假设函数  $L$  关于广义速度  $\dot{q}_\alpha$  的海斯式(“小海斯式”)不等于零①:

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right)_{\alpha, \beta=m+1}^n \neq 0. \quad (3)$$

于是, 应用上一节所证明的唐肯定理, 我们便得到变换(2)的逆变换:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha=m+1, \dots, n), \quad (4)$$

式中  $R=R(t, q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha)$  称为罗司函数, 由下式确定:

$$R = \sum_{\alpha=m+1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \quad (5)$$

它的右端部分应以罗司变量表示。

① 在一般情况, 这个不等式不能从第 64 页上的不等式(19)导出, 而是一个补充条件。对于自然系统, 不等式(3)可以由  $L_2 = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$  的正定性 ( $L_2$  是正定二次型)直接推出。此时, 二次型的系数主子式

$$\det \left( \frac{\partial^2 L_2}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right)_{\alpha, \beta=m+1}^n = \det (a_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta=m+1}^n$$

是正的。

在此, 变量  $t, q_i, q_\alpha, \dot{q}_i (i=1, \dots, m; \alpha=m+1, \dots, n)$  被看作参数, 因而, 同样由唐肯定理, 便有:

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, m), \quad (6)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha=m+1, \dots, n), \quad (7)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (8)$$

关于坐标  $q_i$  的拉格朗日方程, 按照等式(6), 可以写成:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, m). \quad (9)$$

关于坐标  $q_\alpha$  的拉格朗日方程

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha=m+1, \dots, n)$$

连同公式(4)和(7)一起给出

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha=m+1, \dots, n). \quad (10)$$

方程(9)和(10)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} &= 0 \quad (i=1, \dots, m), \\ \frac{dq_\alpha}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

构成罗司方程组。它是由  $m$  个拉格朗日型的二阶微分方程和  $2(n-m)$  个哈密顿型的一阶微分方程组成的, 而且, 罗司函数在前  $m$  个方程中起着拉格朗日函数的作用, 而在其余的方程中起着哈密顿函数的作用<sup>①</sup>。

① 如果我们希望保持广义冲量与拉格朗日函数间的关系, 那么, 在(11)的前一组方程中就得将函数  $-R$  看作拉格朗日函数, 因为, 按公式(6),

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial(-R)}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, m).$$

## § 14. 循环坐标

若坐标  $q_\alpha$  不显含于拉格朗日函数, 即  $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$ , 则称其为循环坐标。

在推导哈密顿方程和罗司方程时我们曾得到等式

$$-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial R}{\partial q_\alpha}. \quad (1)$$

由这些等式可知偏导数  $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$  和  $\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}$  只能同时为零。因此, 循环坐标也可以定义为不显含于哈密顿函数  $H$  或罗司函数  $R$  的坐标。这些定义是彼此等价的。

对应于循环坐标  $q_\alpha$  的广义冲量在运动中保持其值不变。事实上, 由正则方程, 得:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0,$$

即  $p_\alpha = \text{const} = c_\alpha$ 。

现在假设有  $r = n - m$  个循环坐标  $q_\alpha$  ( $\alpha = m+1, \dots, n$ ), 它们不显含在  $H$  中, 因之, 与之对应的广义冲量  $p_\alpha$  可代之以常数  $c_\alpha$ 。于是<sup>①</sup>,

$$H = H(t, q_i, p_i, c_\alpha). \quad (2)$$

现在来写出关于非循环坐标的正则方程:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3)$$

由函数  $H$  的结构 (2) 可知方程 (3) 乃是关于  $2m$  个未知函数  $q_i, p_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 的一组  $2m$  个一阶微分方程。将这个方程组积分, 便得到:

① 附标  $i$  取遍  $1, \dots, m$  各值, 而附标  $\alpha$  取遍  $m+1, \dots, n$  各值。

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \varphi_i(t, c_\alpha, c_i, c'_i), \\ p_i &= \psi_i(t, c_\alpha, c_i, c'_i) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, m), \quad (4)$$

其中  $c_i, c'_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) 是  $2m$  个新的任意常数。将表达式(4)代入  $H$  后, 便可以根据方程

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} \quad (\alpha = m+1, \dots, n) \quad (5)$$

借求积方法来确定  $q_\alpha$ :

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} dt + c'_\alpha \quad (\alpha = m+1, \dots, n). \quad (6)$$

因此, 实质上, 一切都归结为对方程组(3)的积分, 组(3)是  $2m$  阶的, 它比原方程组的阶数  $2n$  小  $2r$  阶, 这里  $r = n - m$  是循环坐标的个数, 也就是说, 有  $r$  个循环坐标, 就可以使方程组降低  $2r$  阶。

方程组(3)是哈密顿型的。我们来指出, 如何借罗司方程由  $m$  个拉格朗日型的二阶微分方程得到自治方程组<sup>①</sup>。事实上, 将对应于循环坐标  $q_\alpha$  的广义冲量  $p_\alpha$  代之以常数  $c_\alpha$  ( $\alpha = m+1, \dots, n$ ), 并将罗司函数写成  $t, q_i, \dot{q}_i$  和  $c_\alpha$  ( $i=1, \dots, m; \alpha = m+1, \dots, n$ ) 的函数形式:

$$R = R(t, q_i, \dot{q}_i, c_\alpha), \quad (7)$$

则关于非循环坐标的罗司方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (8)$$

就是所要求的自治方程组, 而循环坐标  $q_\alpha$  可由上节罗司方程(11)中相应的方程借求积得到:

$$q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial c_\alpha} dt + c'_\alpha. \quad (9)$$

<sup>①</sup> 这里, 我们将不包含“多余”未知函数的微分方程组称为自治方程组。所谓“多余”的未知函数是指对所给方程组进行积分之前就能预先决定的那些未知函数。

这里  $\frac{\partial R}{\partial c_\alpha}$  中的全体  $q_i$  和  $\dot{q}_i$  应事先代之以对方程组 (8) 进行积分而得到的关于  $2m+1$  个变量  $t, c_i$  和  $c'_i (i=1, \dots, m)$  的函数。

**例题.** 在 § 12 末所考察的例题中

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\dot{\varphi}^2] - \Pi(r),$$

$\varphi$  是循环坐标,

$$p_\varphi = m(r^2 + d^2)\dot{\varphi} = \text{const} = c_\varphi.$$

罗司函数

$$\begin{aligned} R = p_\varphi \widehat{\dot{\varphi}} - \widehat{L} &= \frac{1}{2}m[-\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\widehat{\dot{\varphi}}^2] + \Pi(r) = \\ &= -\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2m} \frac{p_\varphi^2}{r^2 + d^2} + \Pi(r) = \\ &= -\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{c_\varphi^2}{2m} \frac{1}{r^2 + d^2} + \Pi(r). \end{aligned}$$

运动的确切归结为积分一个二阶微分方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R}{\partial r} = 0,$$

将它展开来便是:

$$m\ddot{r} = \frac{c_\varphi^2}{m} \frac{r}{(r^2 + d^2)^2} - \Pi'(r).$$

这是重物沿轨道作相对运动的方程, 因为在它的右端有离心力:

$$\frac{c_\varphi^2}{m} \frac{r}{(r^2 + d^2)^2} = m r \dot{\varphi}^2 \quad (c_\varphi = p_\varphi).$$

循环坐标有时又称之为可遗坐标或隐坐标。这个名称可以这样来解释: 在对方程组 (3) 或 (8) 进行积分时, 我们好像忘记了循环坐标的存在, 而将  $p_\alpha$  看作不变参数。

在所考察的例子中, “忘掉”循环坐标相当于“忘掉”轨道的转动, 而得到的则是重物沿轨道作相对运动的微分方程。

“循环坐标”这个名词本身和如下事实有关: 在许多力学问题中, 描述沿封闭轨道(循环)运动的角  $\varphi$  不显含在  $L$  的表达式中, 因而, 是循环坐标。

我們來指出在具有循环坐标的完整系統和广义保守系統之間若干相似处。对于前一种系統,  $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0$ , 对于后一种系統,  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ 。对于前者, 有积分  $p_\alpha = \text{const}$ , 对于后者則有积分  $H = \text{const}$ 。往后在討論到力学的基本积分不变量时, 将会看到这种相似的根本所在。

对于具有循环坐标的系統的运动, 更深入的研究将在第七章中給出。

### § 15. 泊松括弧

本节將討論哈密頓运动方程組积分的某些性质。

函数  $f(t, q_i, p_i)$  称为运动方程

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

的积分, 如果对于所給系統的任何运动, 这函数保持常值  $c$  不变<sup>①</sup>:

$$f(t, q_i, p_i) = c. \quad (2)$$

有时也將关系式(2)本身叫作积分。

函数  $H(q_i, p_i)$  是广义保守系統的一个积分。如果  $q_\alpha$  是循环坐标, 則  $p_\alpha$  是积分。

显然, 如果函数  $f_1, \dots, f_l$  都是运动方程的积分, 則这些积分的任意函数

$$F(f_1, \dots, f_l)$$

仍然是积分。因此, 往后我們將仅对独立的积分感到兴趣。

如果已經知道了由  $2n$  个独立积分  $f_1, \dots, f_{2n}$  构成的积分“完全”組( $n$  是系統的自由度), 則由关系式

<sup>①</sup> 当由系統的某一运动轉到另一运动时, 常数  $c$  的大小将会改变。

$$f_k(t, q_i, p_i) = c_k \quad (k=1, \dots, 2n) \quad (3)$$

解出  $q_i$  和  $p_i$  来就得到有限形式的运动方程:

$$q_i = \varphi_i(t, c_1, \dots, c_{2n}), \quad p_i = \psi_i(t, c_1, \dots, c_{2n}), \quad (4)$$

这些方程包含  $2n$  个任意常数  $c_1, \dots, c_{2n}$ 。

因此, 如果知道了  $2n$  个独立积分, 那也就知道了系统的一切运动。如果知道了  $l$  个独立积分  $f_1, \dots, f_l$ , 其中  $l < 2n$ , 则对系统的运动我们就只有部分的概念, 而且  $l$  愈大, 这个概念愈完全。因此, 我们总希望找到尽可能多的独立积分。

我们在这里来介绍泊松和雅科毕提出的求运动方程积分的方法。

设  $f(t, q_i, p_i)$  是方程(1)的积分。则当以哈密顿方程组(1)的任何解替代  $q_i, p_i (i=1, \dots, n)$  时, 函数  $f$  变为常数  $c$ , 即按方程(1)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (5)$$

泊松对于由任意二函数  $\varphi(t, q_i, p_i)$  和  $\psi(t, q_i, p_i)$  的偏导数所构成的如下表达式引入了一个特殊的符号——泊松括弧:

$$(\varphi\psi) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right). \quad (6)$$

利用泊松括弧可以把公式(5)——使函数  $f(t, q_i, p_i)$  成为方程(1)的积分的必要充分条件——写成

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (fH) = 0. \quad (7)$$

泊松括弧有如下的性质:

对于任意的函数  $\varphi(t, q_i, p_i), \psi(t, q_i, p_i), \chi(t, q_i, p_i)$ :

$$1^\circ. (\varphi\psi) = -(\psi\varphi);$$

$$2^\circ. (c\varphi, \psi) = c(\varphi\psi) \quad (c \text{ 是常数});$$

$$3^\circ. (\varphi + \psi, \chi) = (\varphi\chi) + (\psi\chi);$$



$$4^\circ. ((\varphi\psi)\chi) + ((\psi\chi)\varphi) + ((\chi\varphi)\psi) = 0;$$

$$5^\circ. \frac{\partial}{\partial t}(\varphi\psi) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\psi\right) + \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right).$$

恒等式  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 5^\circ$  可以直接由泊松括弧的定义(6)得到。

恒等式  $4^\circ$  叫作泊松恒等式, 可借特殊方式来证明。令  $X$  和  $Y$  是作用在函数  $f(x_1, \dots, x_m)$  上的两个一阶微分算子:

$$Xf = \sum_{k=1}^m X_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad Yf = \sum_{k=1}^m Y_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad (8)$$

其中  $X_k, Y_k (k=1, \dots, m)$  都是变量  $x_1, \dots, x_m$  的函数。于是, “换位子”  $Z = XY - YX$  也是一阶算子<sup>①</sup>,

$$Zf = X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{k=1}^m [X(Y_k) - Y(X_k)] \frac{\partial f}{\partial x_k}. \quad (9)$$

现在回到泊松括弧  $(\varphi f)$  上来。这些括弧可以看作是将形如(8)式的线性算子  $\Phi$  用于变量为  $q_i, p_i (i=1, \dots, n)$  的函数  $f$  上的结果:

$$\Phi f = (\varphi f) = \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial\varphi}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (10)$$

这个一阶微分算子完全决定于函数  $\varphi$ 。函数  $\psi$  和  $\chi$  也可以定义两个类似算子  $\Psi$  和  $\chi$ 。

现在来直接证明恒等式  $4^\circ$ 。将  $4^\circ$  式左端的任一双重括弧展开, 则其每一项都将包含函数  $\varphi$  或  $\psi$ , 或  $\chi$  的二阶偏导数作为因子。但是,  $((\varphi\psi)\chi)$  却不包含  $\chi$  的二阶偏导数, 而和式

$$\begin{aligned} ((\psi\chi)\varphi) + ((\chi\varphi)\psi) &= (\psi(\varphi\chi)) - (\varphi(\psi\chi)) = \\ &= (\Psi\Phi - \Phi\P)\chi \end{aligned}$$

乃是关于  $\chi$  的一阶微分算子。因此, 泊松恒等式的左端不包含  $\chi$  的二阶偏导数, 由于对称性, 显然也不包含  $\varphi$  和  $\psi$  的二阶偏导数。

<sup>①</sup> 直接计算表明, (9)式右端含有函数  $f$  二阶偏导数的各项互相抵消。

換句話說, 4°式左端的一切項都相互抵消了。這就是所要證明的。

現在來證明一個基本定理。

**雅科畢-泊松定理.** 如果  $f$  和  $g$  是運動方程的兩個積分, 則  $(fg)$  也是運動方程的積分。

**證明.** 我們來證明如果函數  $f$  和  $g$  都滿足關係式(7):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (fH) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} + (gH) = 0, \quad (11)$$

則函數  $(fg)$  也滿足同樣的關係:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial t} + ((fg)H) = 0. \quad (12)$$

事實上, 根據恆等式 5°,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(fg) &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} g \right) + \left( f \frac{\partial g}{\partial t} \right) = -((fH)g) - (f(gH)) = \\ &= ((Hf)g) + ((gH)f). \end{aligned}$$

於是, 由泊松恆等式立即可得:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial t} + ((fg)H) = ((fg)H) + ((gH)f) + ((Hf)g) = 0.$$

定理證畢。

上述定理給了我們一個法則, 利用這個法則可以由二個積分  $f(t, q_i, p_i)$  和  $g(t, q_i, p_i)$  經代數運算和微分運算後得到第三個積分:

$$(fg) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

例如, 取  $f$  和  $(fg)$  的泊松括弧, 仍然得到一個積分, 如此等等。但是不要忘記, 這樣得到的新的積分可能恆等於零, 或者是已知積分的函數。因此, 只有選擇特別的獨立積分  $f_1, \dots, f_l (l < 2n)$ , 才可期望利用泊松括弧得到 (對完全積分組而言) 所短少的積分  $f_{l+1}, \dots, f_{2n}$ 。

作为一个例子①, 我们来讨论与外界作用完全隔绝的自由质点系统的动量积分和动量矩积分②:

$$\begin{aligned} P_x &= \sum p_x, \quad P_y = \sum p_y, \quad P_z = \sum p_z, \\ M_x &= \sum m_x = \sum (yp_z - zp_y), \quad M_y = \sum m_y = \sum (zp_x - xp_z), \\ M_z &= \sum m_z = \sum (xp_y - yp_x), \end{aligned}$$

其中

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

如果系统是孤立的, 则函数  $P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z$  都是积分, 即存在“守恒积分”:

$$P_x = c_1, \quad P_y = c_2, \quad P_z = c_3, \quad M_x = c_4, \quad M_y = c_5, \quad M_z = c_6. \quad (13)$$

当有主矢量为  $\mathbf{R}(X, Y, Z)$ 、主矩为  $\mathbf{L}_0(L_x, L_y, L_z)$  的外力场存在时, 如果量  $X, Y, Z, L_x, L_y, L_z$  中的某一个为零, 则(13)式中相应的积分成立。

现在对于与一个质点相关的量取泊松括弧:

$$\begin{aligned} (p_x p_y) &= 0, \quad (p_x m_y) = -\frac{\partial p_x}{\partial p_x} \frac{\partial m_y}{\partial x} = p_z, \\ (m_x m_y) &= \frac{\partial m_x}{\partial z} \frac{\partial m_y}{\partial p_z} - \frac{\partial m_x}{\partial p_z} \frac{\partial m_y}{\partial z} = xp_y - yp_x = m_z. \end{aligned}$$

我们注意, 当泊松括弧中的一个量( $p$  或  $m$ )属于某一质点, 而第二个量又属于另一质点时, 泊松括弧总是等于零的。因此,

$$\left. \begin{aligned} (P_x P_y) &= \sum (p_x p_y) = 0, \\ (P_x M_y) &= \sum (p_x m_y) = \sum p_z = P_z, \\ (M_x M_y) &= \sum (m_x m_y) = \sum m_z = M_z. \end{aligned} \right\} \quad (14')$$

将字母  $x, y, z$  循环置换就得到类似的关系式:

$$\left. \begin{aligned} (P_y P_z) &= 0, \quad (P_z P_x) = 0, \\ (P_y M_z) &= P_x, \quad (P_z M_x) = P_y, \\ (M_y M_z) &= M_x, \quad (M_z M_x) = M_y. \end{aligned} \right\} \quad (14'')$$

六个守恒定律(13)并非独立的。由关系式(14')和(14'')可以断定, 如果有积分

$$P_x = c_1, \quad M_x = c_4, \quad M_y = c_5, \quad (15)$$

① 见 Ландау Л., Пятагорский Л. 著 Механика, М.—Л., 1940, 第 151 页。

② 在本例中, 这里及其后和号都是对系统全体质点求和的。

則必有积分

$$P_y = c_2, \quad P_z = c_3, \quad M_z = c_6. \quad (16)$$

自然, 这一切只是对于势力場才是正确的。在非势力場中, 由等式

$$X = 0, \quad L_x = 0, \quad L_y = 0 \quad (17)$$

不能导出等式

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad L_z = 0 \textcircled{1}. \quad (18)$$

---

① 只有当滿足等式(17)时, 才有守恒积分(15)。与此相仿, 积分(16)只有在等式(18)存在时才成立。

## 第三章 变分原理和积分不变量

### § 16. 哈密頓原理

我們来看有  $n$  个独立坐标  $q_1, \dots, q_n$  和拉格朗日函数  $L(t, q_i, \dot{q}_i)$  的任意完整系統。

积分

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (1)$$

叫做在時間區間  $(t_0, t_1)$  上的(哈密頓)作用量，而表达式  $Ldt$  則称为元作用量①。

因为函数  $L$  具有  $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$  的形式，所以，为了計算作用量(1)就必须給定時間間隔  $t_0 \leq t \leq t_1$  上的函数  $q_i = q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ )。換句話說，作用量  $W$  乃是依賴于系統运动的泛函数。

如果我們任意地給出一組函数  $q_i = q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ )，那么我們就有了一個在运动学上可能的运动（为約束所容許的运动）。这样的运动可用以  $q_i$  和時間  $t$  为坐标的  $n+1$  維增广坐标空間里的一条曲綫来表示。我們来考察所有可能的这种曲綫——过空間已知两点  $M_0(t_0, q_i^0)$  和  $M_1(t_1, q_i^1)$  的“路徑”（見图 29，这是关于  $n=2$  的情况），也就是将系統由其初始时刻  $t_0$  所在之位置( $q_i^0$ )轉移到时刻  $t_1$  所在之終了位置( $q_i^1$ )的所有可能的运动。这里，初始时刻  $t_0$  和終了时刻  $t_1$ 、系統的初始位置和終了位置都是事先給定了的。至于运动的中間过程則是任意的。

---

① 对于自然系統， $L = T - \Pi$  有与能量相同的量綱。因此，作用量的量綱是：能量  $\times$  時間  $\equiv$  力  $\times$  长度  $\times$  時間。

如果是非自由的自然系統，則我們所考察的运动就只受一个限制：在系統运动时，加在系統各点上的約束不能被破坏。当以独立坐标給出运动时，即給出  $q_i = q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ )，这条件是自动滿足的。

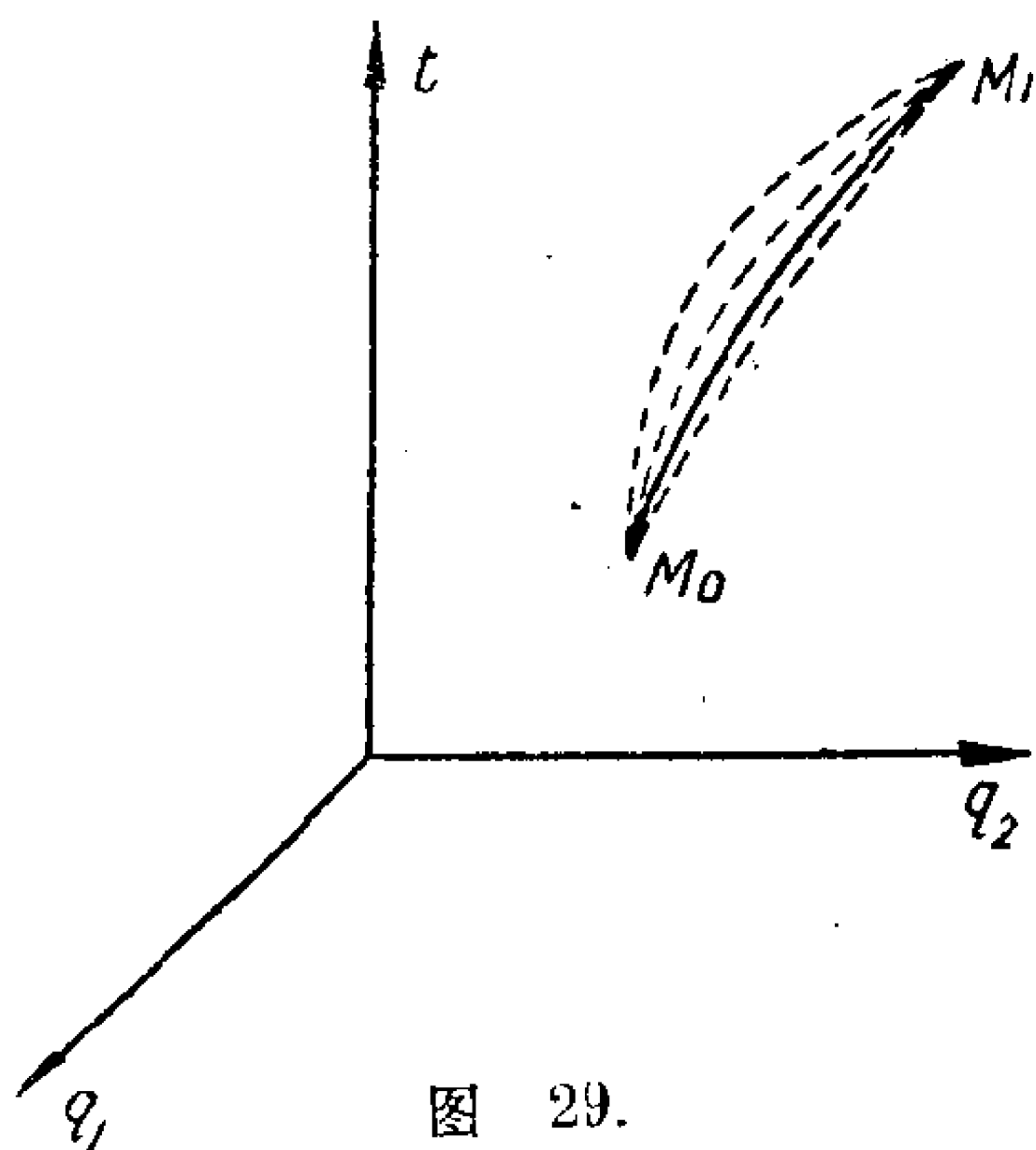


图 29.

假設在所考察的路徑中存在一条所謂的“正路”，即在給定的  $L$  函数下(也就是給定力場下)，系統运动所沿的路徑。对于正路，函数組  $q_i = q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 滿足拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

我們將过点  $M_0$  和  $M_1$  的所有其他路徑称为“旁路”。(在图 29 上，正路用实綫表示，旁路用虛綫表示。)

我們来证明，和旁路相比，作用量  $W$  在正路上有极值(严格地說，是逗留值)。这就是哈密頓原理<sup>①</sup>。

我們来看任意的单参数路徑族

$$q_i = q_i(t, \alpha) \quad (t_0 \leq t \leq t_1; -\gamma \leq \alpha \leq \gamma; i = 1, \dots, n);$$

当  $\alpha = 0$  时它給出正路，当  $\alpha \neq 0$  时則得旁路。設所有的这些路徑有共同的始点  $M_0$  和終点  $M_1$ ：  $q_i(t_0, \alpha) = q_i^0, q_i(t_1, \alpha) = q_i^1$  ( $-\gamma \leq \alpha \leq \gamma; i = 1, \dots, n$ )。

沿族中路徑計算的作用量  $W$  乃是参数  $\alpha$  的函数：

① 这个原理包含在哈密頓于 1834—1835 年发表的著作中(見 сборник “Вариационные принципы механики”, М., 1959, 第 239 頁)。这里, 哈密頓假定了系統是平稳的(他将动能  $T$  表示为广义速度的二次型作为出发点)。对于非平稳約束的一般情况, 这个原理是由 M. B. 奥斯特罗格拉得斯基于 1818 年給出并論证的(見同书 770—771, 829)。因此, 上述原理有时称为哈密頓—奥斯特罗格拉得斯基原理。

$$W(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L[t, q_i(t, \alpha), \dot{q}_i(t, \alpha)] dt.$$

我们来计算作用量  $W$  的变分, 即对  $\alpha$  的微分:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \end{aligned} \quad (3)$$

在此, 为了变换(3)式中的积分, 我们利用了分部积分法和变分运算  $\delta$  与(对时间的)微分运算  $\frac{d}{dt}$  的可交换性质:

$$\begin{aligned} \delta \dot{q} &= \delta \frac{d}{dt} q_i(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} q_i(t, \alpha) \delta \alpha = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} q_i(t, \alpha) \delta \alpha \right] = \frac{d}{dt} \delta q_i. \end{aligned}$$

此外, 因为路径的始末两端不变, 所以当  $t=t_0$  和  $t=t_1$  时, 变分  $\delta q_i=0$ 。因此, 被积出的部分等于零。

由等式(3)可以看出, 对于正路( $\alpha=0$  的路径)而言, 根据拉格朗日方程, (3)式最后一个积分号下的表达式是等于零的。因此,

$$\text{对于正路, } \delta W = 0. \quad (4)$$

这就是哈密顿原理的数学形式。

反之, 若对于某路径  $\delta W=0$ , 则这路径是正路。事实上, 由于变分  $\delta q_i (i=1, \dots, n)$  的任意性 ( $\delta q_i$  在路径两端为零, 在其余各点完全任意), 根据等式(3), 由条件  $\delta W=0$  即得等式(2), 即关于正路的拉格朗日方程。

由于从哈密顿原理可以导出独立坐标下的拉格朗日方程 (反



之亦然), 所以哈密頓原理可以作为完整系統的动力学基本原理①。

正路(在給定的  $L$  函数下, “真正”的运动)既可以用拉格朗日型的运动微分方程来規定, 也可以用哈密頓变分原理来規定。但是, 运动微分方程和变分原理之間却有着原則性的差別。

运动微分方程表示出时刻  $t$  和在此时刻系統各点的位置、速度、加速度之間的关系。如果在某路徑的每一点上, 这个关系都得到滿足, 則此路徑必是正路。而变分原理則是从整体上規定了整个正路。它表述出某一泛函数的极值(逗留值)性质, 这个性质使我們得以将正路从其他在运动学上可能的路徑中区分出来。变分原理有着更直观更紧凑的形式, 常被用作新力学部門(非古典力学)的基础。

注. 微分方程(2)是使一阶变分  $\delta W$  等于零的必要而充分条件; 这里的  $W$  是形如(1)式的积分。在变分法中, 方程(2)叫做关于变分問題

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i) dt = 0$$

的欧拉微分方程。

为了論证哈密頓原理, 曾經利用了独立坐标下的拉格朗日方程。然而, 在自然系統的情况下, 这些方程本身則是得自动力学普遍方程

$$\sum_{v=1}^N (F_v - m_v \ddot{r}_v) \delta r_v = 0. \quad (5)$$

我們来指出怎样利用动力学普遍方程(5)直接导出哈密頓原理。这样, 拉格朗日方程也就可以立即由哈密頓原理得出。

如果在  $r_v$  的表达式

---

① 前述哈密頓原理的表述形式是在力有势(自然系統的情况)的前提下得到的。原理的更一般表述形式(包括非有势力情况)将在下面給出[見 89 頁, 公式(9)]。

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t, q_i) \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

中, 将  $q_i$  代之以函数  $q_i(t, \alpha)$ , 则  $\mathbf{r}_\nu$  就成为  $t$  和  $\alpha$  的复合函数。将这个复合函数对  $\alpha$  微分(即取其变分)即得:

$$\delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (6)$$

这个公式和第 30 頁上那个用来确定完整系統各点虚位移的公式(8)完全一样。因此, 在任何时刻  $t$ , 矢徑的变分就是系統质点的虚位移。

即使不利用公式(6), 而只从变分和虚位移的定义出发也可以确信上述論断是正确的。事实上, 变分  $\delta \mathbf{r}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \alpha} \delta \alpha$  乃是系統中点  $P_\nu$  的这样一个无限

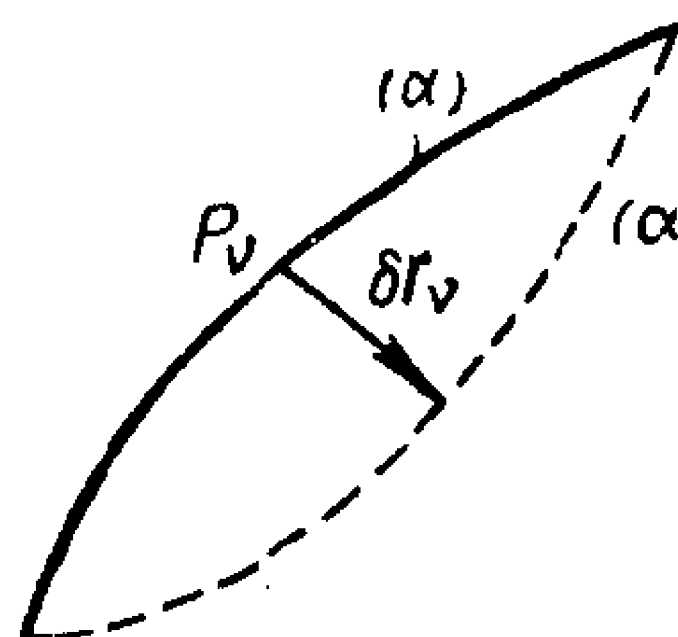


图 30.

小位移: 由对应于某一固定  $\alpha$  值的軌道 ( $\alpha = 0$  时就是正路)上一点到对应于参数值为  $\alpha + \delta \alpha$  的相邻軌道上一点的位移(图 30); 而相邻軌道上的这两个点則是对同一个时刻  $t$  取的, 因为当对  $\alpha$  微分时,  $t$  的值是固定不变的。因此,  $\delta \mathbf{r}_\nu$  就是点

$P_\nu$  从它在时刻  $t$  的一个可能位置到同一时刻另一个可能位置的位移, 即  $\delta \mathbf{r}_\nu$  是系統  $P_\nu$  点的虚位移。

因此, 我們可以将动力学普遍方程(5)中的  $\delta \mathbf{r}_\nu$  看作矢徑  $\mathbf{r}_\nu$  的变分。但由于运算  $\frac{d}{dt}$  和  $\delta$  (对  $\alpha$  的微分)的次序可以調換:

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_\nu = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{r}_\nu(t, \alpha) \delta \alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \dot{\mathbf{r}}_\nu(t, \alpha) \delta \alpha = \delta \dot{\mathbf{r}}_\nu.$$

因之

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu &= \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_\nu = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \delta \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu - \delta T, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\delta T$  是动能  $T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2$  的变分。

我們仍以  $\delta A$  表示主动力  $\mathbf{F}_\nu$  在虚位移  $\delta \mathbf{r}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) 上的元功, 則利用(7)式可将方程(5)写作如下形式:

$$\delta T + \delta A - \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N m_v \dot{r}_v \delta r_v = 0.$$

將上式兩端在從  $t = t_0$  到  $t = t_1$  的區間上對  $t$  積分：

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt - \left[ \sum_{v=1}^N m_v \dot{r}_v \delta r_v \right]_{t=t_0}^{t=t_1} = 0. \quad (8)$$

這裡  $\left[ \right]_{t=t_0}^{t=t_1}$  表示方括弧內的表达式在  $t = t_1$  和  $t = t_0$  時的兩個值之差。

但當  $t = t_0$  和  $t = t_1$  時矢徑  $r_v$  無變更（因為系統的始末位置是事先給定了的）：

$$r_v(t_0, \alpha) = r_v^0, \quad r_v(t_1, \alpha) = r_v^{(1)} \quad (v = 1, \dots, N).$$

所以，當  $t = t_0$  和  $t = t_1$  時， $\delta r_v = 0$ 。因之，(8) 式中的第二項等於零，於是，可以寫作

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0. \quad (9)$$

我們來看力有勢  $\Pi = \Pi(t, q_i)$  的情況。在這情況下，

$$\delta A = -\delta \Pi,$$

其中  $\delta \Pi$  是函數  $\Pi(t, q_i)$  的虛微分（變分）<sup>①</sup>，因而等式(9)可以寫成

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0,$$

由此即得

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0.$$

於是，由動力學基本方程(5)我們得到了哈密頓原理  $\delta W = 0$ 。如前所述，由此便可以立即得到拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

在非有勢力  $Q_i$  的情況下，為了得到拉格朗日方程，代替等式(4)，應當由等式(9)出發。將公式(3) [將其中的函數  $L$  代之以函數  $T(t, q_i, \dot{q}_i)$ ] 用於積

---

① 即  $\delta \Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i$ .

分  $\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt$ , 并利用主动力的元功表达式  $\delta A = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$ , 即得:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0. \quad (10)$$

根据量  $\delta q_i (i=1, \dots, n)$  的任意性, (10) 式积分号下括弧里的表达式应当等于零, 也就是说, 正路应当满足拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (11)$$

现在来说明, 沿正路的作用量之值比之沿旁路是否为极小。

作为一个例子, 我们来看 力场不存在时, 被迫沿球面运动的

非自由质点的运动 (按其惯性在球面上运动)。假设质点的质量  $m=1$ 。在球坐标中(图 31)

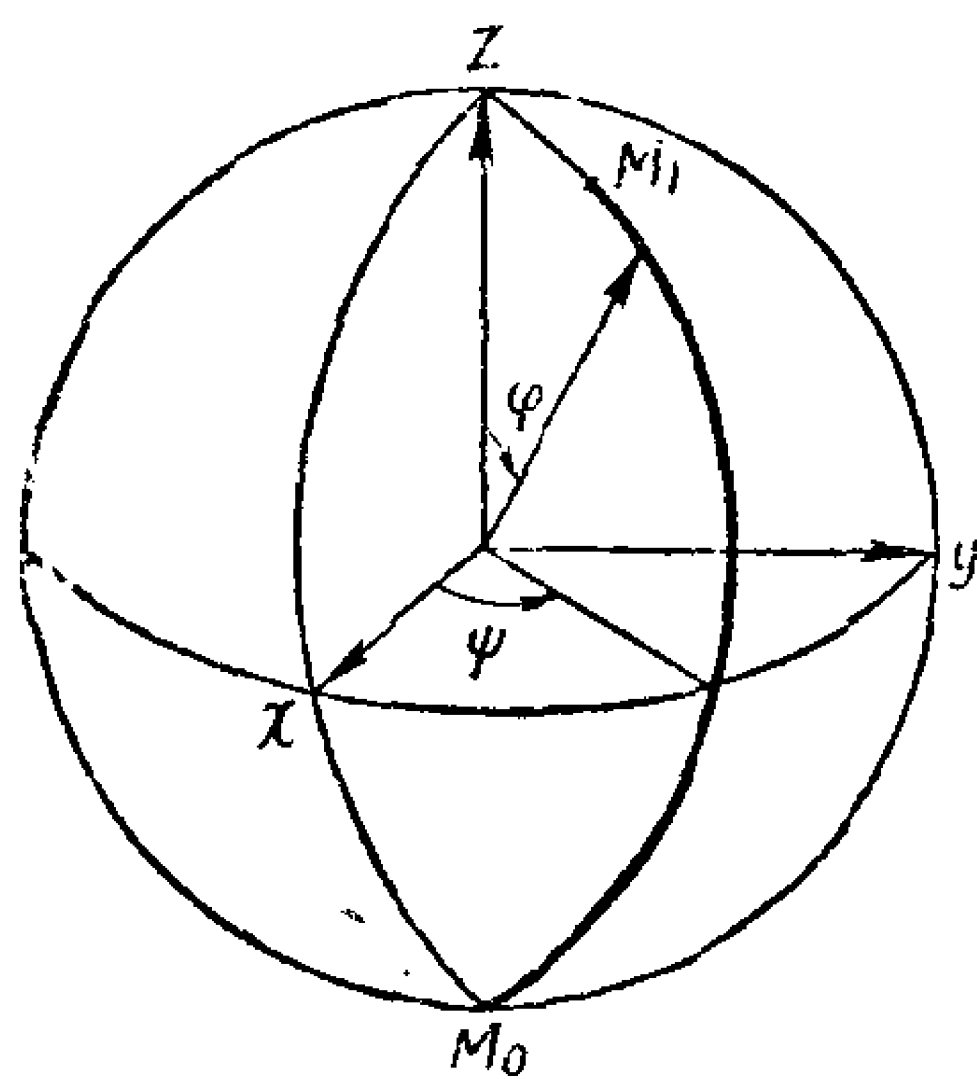


图 31.

$$L = \frac{v^2}{2} = \frac{R^2}{2} (\dot{\varphi}^2 + \sin^2 \varphi \dot{\psi}^2).$$

对于正路

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \text{const}$$

( $\psi$  是循环坐标), 即

$$\ddot{\varphi} - \sin \varphi \cos \varphi \dot{\psi}^2 = 0, \quad \sin^2 \varphi \dot{\psi} = \sin^2 \varphi_0 \dot{\psi}_0.$$

对于正路, 可以认为初速度  $v_0$  沿子午线 ( $\psi = \text{const}$ ) 方向, 即  $\dot{\psi}_0 = 0$  (这并不损害问题的一般性)。于是, 有

$$\dot{\psi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \text{const}, \quad v^2 = R^2 \dot{\varphi}^2 = \text{const}.$$

因此正路乃是沿大圆弧的等速运动。此时

$$W_{\text{旁路}} - W_{\text{正路}} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (v^2 - v_0^2) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= v_0 \int_{t_0}^{t_1} (v - v_0) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (v - v_0)^2 dt \geq \\
&\geq v_0 \int_{t_0}^{t_1} (v - v_0) dt = v_0 (\sigma_{\text{旁路}} - \sigma_{\text{正路}}).
\end{aligned}$$

在球面上連結  $M_0$  和  $M_1$  两点的大圆弧长  $\sigma_{\text{正路}}$  总是小于連結相同两点的任何其他曲綫之长  $\sigma_{\text{旁路}}$ 。因此，

$$W_{\text{正路}} < W_{\text{旁路}}.$$

但这只有当  $\sigma_{\text{正路}} = \smile M_0 M_1 < \pi R$  时才是正确的。当  $\sigma_{\text{正路}} > \pi R$  时， $W_{\text{正路}}$  就不再总是小于  $W_{\text{旁路}}$ ，而作用量  $W$  的最小值将在大圆补弧 ( $M_0$  和  $M_1$  之間的最短距离) 上被达到。如果沿大圆弧移动点  $M_1$  以使此弧长增大，则  $M_0$  的对徑点 (直径的两个端点互为对徑点——譯者) 是一临界点 (当  $M_1$  达到此点之前  $W_{\text{正路}}$  取极小值，而于此点之后則不然)，将它記作  $M_0^*$ 。

在一般情况下，也有类似的情形。可以证明<sup>①</sup>，当  $M_1$  点充分靠近  $M_0$  时，只有一条或有限条正路通过  $M_0$  和  $M_1$ 。而当点  $M_1$  离  $M_0$  足够远时，則可能有无穷多条正路通过  $M_0$  和  $M_1$ 。点  $M_1$  的这样一个临界位置  $M_0^*$  称之为  $M_0$  的共軛动焦点。于是，得到以下的論断：当在弧  $M_0 M_1$  上无  $M_0$  的共軛动焦点  $M_0^*$  时，沿正路  $M_0 M_1$  的作用量比之沿旁路有极小值。

## § 17. 第二种型式的哈密頓原理

現在来讲哈密頓变分原理的另一个型式。代替  $n+1$  維增广坐标空間，我們来看  $2n+1$  維增广相空間，在这个空間里，点的坐标是量  $q_i, p_i (i=1, \dots, n)$  和  $t$ 。我們来考察在这个空間中过  $B_0(q_i^0, p_i^0, t_0)$  和  $B_1(q_i^1, p_i^1, t_1)$  两点的正路以及联結这两点的一切可能的其他曲綫 (“旁路”；见图 32,  $n=1$ )。

① 見 Бобылев Д. К., О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия Лагранжа, 載于 т. LXI Зап. Ак. наук, СПб, 1889.

给出正路的那些函数  $q_i(t)$  和  $p_i(t)$  ( $i=1, \dots, n$ ) 满足哈密顿方程

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (1)$$

在讨论中我们引入一个依赖于  $4n+1$  个独立变量的函数  $L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i)$ , 它由如下等式来确定①:

$$L^* = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(t, q_i, p_i). \quad (2)$$

不难看出, 利用这个函数可以将哈密顿正则方程(1)写成拉格朗日方程的形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial p_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (3)$$

因为正路由拉格朗日型的方程(3)所规定, 所以, 如前所述, 利用积分

$$\int_{t_0}^{t_1} L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i) dt \quad (4)$$

在正路上有逗留值, 即

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^* dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0, \quad (5)$$

便可使增广相空间中的正路从旁路中被区分出来。

乍看上去似乎哈密顿原理的第二种型式(5)与第一种型式  $\delta W = 0$  并无任何差别, 因为按第67页上的公式(8), 表达式  $L^*$  和函数  $L$  是一样的。但事情并非永远如此。这只对系统的运动才是正确的, 也就是说只对这样的路径  $q_i = q_i(t)$ ,  $p_i = p_i(t)$  ( $i=1, \dots, n$ ) 才是对的, 在这路径上函数  $q_i(t)$  和  $p_i(t)$  以如下关系相联系:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (6)$$

① 等式(2)的右端实际上并未包含量  $\dot{p}_i$ , 因此, 在所给情况下, 函数  $L^*$  与这些量无关, 因而,  $\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} = 0$  ( $i=1, \dots, n$ )。

然而,在第二种型式的哈密頓原理中(与第一种型式不同!), $2n+1$  維增广相空間中过  $B_0$  和  $B_1$  两点的任何曲綫都可以作为旁路进行比较。对于这些路徑,关系式(6)并不一定被滿足,因之,在一般情况下,对于这些路徑  $L^* \neq L$ 。如果对于公式(5),仅限于滿足等式(6)的那些旁路,則哈密頓原理的第二种型式就轉变为第一种型式:  $\delta W = 0$ 。

还須注意,和哈密頓原理第一种表述形式中的点  $M_0$  和  $M_1$  不同,点  $B_0$  和  $B_1$  是不能任意选取的,因为在一般情况下,对于增广相空間中的任意两点不一定会有一正路通过。点  $B_0$  和  $B_1$  应当在哈密頓原理所規定的正路上取。

### § 18. 力学基本积分不变量(龐伽雷-卡当积分不变量)

我們現在来导出如下的一般情况下作用量变分  $\delta W$  的公式,即初始时刻和終了时刻以及初始坐标和終了坐标都不是固定的,而是参数  $\alpha$  的函数:

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= t_0(\alpha), q_i^0 = q_i^0(\alpha), \\ t_1 &= t_1(\alpha), q_i^1 = q_i^1(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, n). \quad (1)$$

在这情况下,将积分  $W = \int_{t_0}^{t_1} L dt$  对参数  $\alpha$  微分,并进行分部积分,

便得到

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt \\ &= L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\delta L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \\ &= L_1 \delta t_1 + \sum_{i=1}^n p_i^1 [\delta q_i]_{t=t_1} - L_0 \delta t_0 - \sum_{i=1}^n p_i^0 [\delta q_i]_{t=t_0} + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt, \end{aligned} \quad (2)$$

其中



$$[\delta q_i]_{t=t_\lambda} = \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} q_i(t, \alpha) \right]_{t=t_\lambda} \delta \alpha \quad (i=1, \dots, n; \lambda=0, 1). \quad (3)$$

另一方面, 对于终了坐标  $q_i^1 = q_i^1[t_1(\alpha), \alpha]$  的变分, 有如下公式:

$$\delta q_i^1 = \dot{q}_i^1 \delta t_1 + \left[ \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{t=t_1} \delta \alpha$$

或

$$\delta q_i^1 = [\delta q_i]_{t=t_1} + \dot{q}_i^1 \delta t_1 \quad (i=1, \dots, n).$$

因之,

$$[\delta q_i]_{t=t_1} = \delta q_i^1 - \dot{q}_i^1 \delta t_1 \quad (i=1, \dots, n). \quad (4)$$

完全类似地有

$$[\delta q_i]_{t=t_0} = \delta q_i^0 - \dot{q}_i^0 \delta t_0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (5)$$

将  $[\delta q_i]_{t=t_1}$  和  $[\delta q_i]_{t=t_0}$  的表达式(4)和(5)代入  $\delta W$  的表达式(2)中, 并注意到

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = H,$$

我们就得到作用量的变分  $\delta W$  在一般情况下的如下公式:

$$\delta W = \left[ \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right]_0^1 &= \\ &= \sum_{i=1}^n p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1 - \sum_{i=1}^n p_i^0 \delta q_i^0 + H_0 \delta t_0. \end{aligned}$$

在任一  $\alpha$  值所对应的路径都是正路(即  $q_i = q_i(t, \alpha)$  ( $i=1, \dots, n$ ) 是一族正路)的特殊情况下, 对于任何  $\alpha$  等式(6)右端的积分, 都将等于零, 因而作用量的变分公式取如下的简单形式:

$$\delta W = \left[ \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right]_0^1. \quad (7)$$

我們取  $2n+1$  維增广相空間 (在此空間中, 点的坐标是  $q_i, p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 和  $t$ ) 来代替  $n+1$  維增广坐标空間, 并在其中取一条任意的閉曲綫  $C_0$ , 它的方程式是

$$\begin{aligned} q_i &= q_i^0(\alpha), \quad p_i = p_i^0(\alpha), \quad t = t_0(\alpha) \\ (i &= 1, \dots, n; 0 \leq \alpha \leq l). \end{aligned} \quad (8)$$

这里,  $\alpha=0$  和  $\alpha=l$  是曲綫  $C_0$  上的同一点。我們以曲綫  $C_0$  上的每个点作为始点, 各引一条正路 (这样的路徑, 在給定始点之后, 由哈密頓正則方程組所唯一决定), 便得到一个封閉的正路管 (見图 33,  $n=1$ ):

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t, \alpha), \quad p_i = p_i(t, \alpha) \\ (i &= 1, \dots, n; 0 \leq \alpha \leq l), \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} q_i(t, 0) &\equiv q_i(t, l), \\ p_i(t, 0) &\equiv p_i(t, l) \\ (i &= 1, \dots, n). \end{aligned}$$

在这管子上再任取一条閉曲綫  $C_1$ , 使之包圍此管, 并和管子的每根母綫仅有一个交点。曲綫  $C_1$  的方程可以写成如下形式①

$$q_i = q_i^1(\alpha), \quad p_i = p_i^1(\alpha), \quad t = t_1(\alpha). \quad (10)$$

我們来考察沿管子母綫从曲綫  $C_0$  到曲綫  $C_1$  的作用量  $W$ :

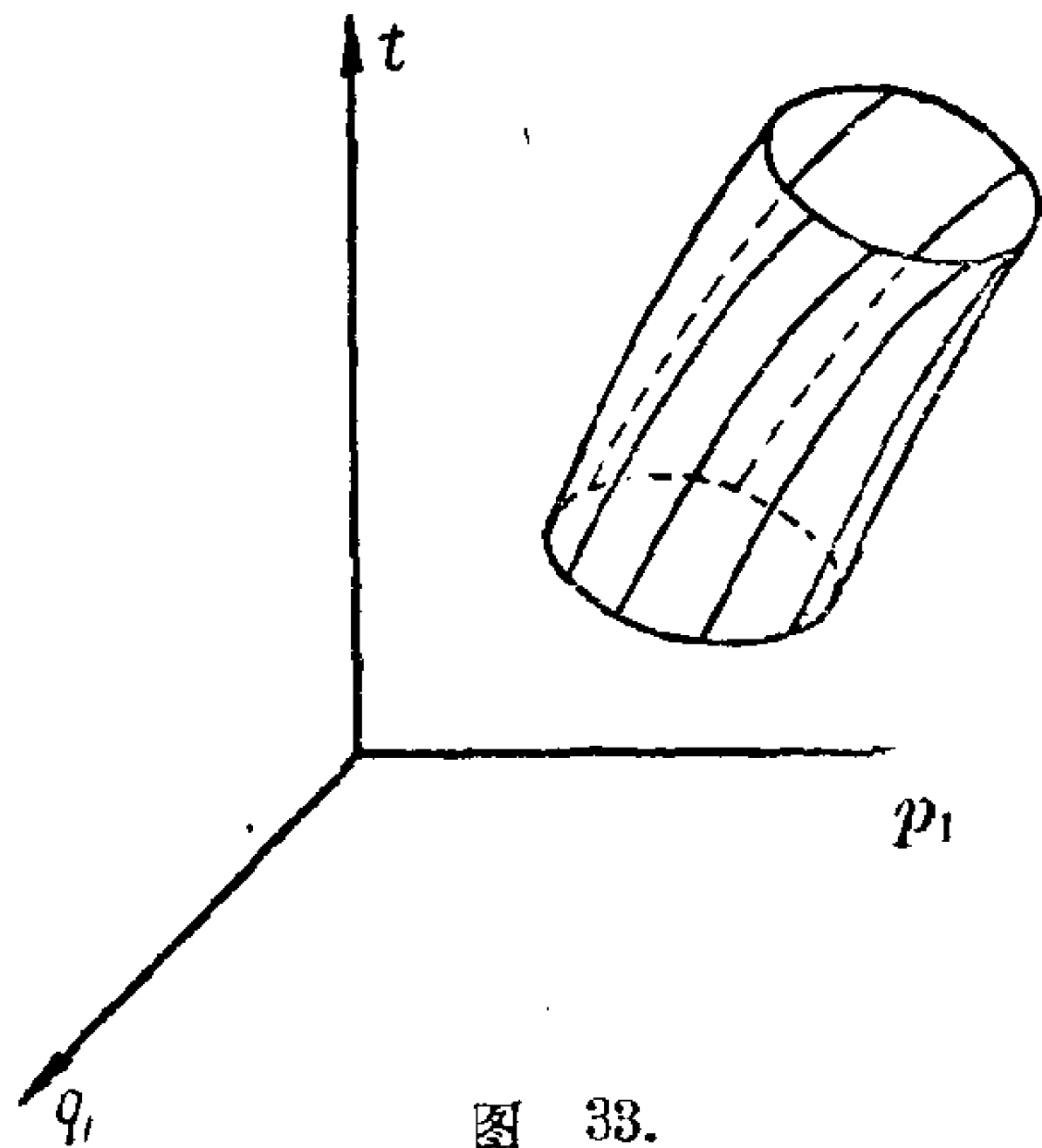


图 33.

① 对于区間  $0 \leq \alpha \leq l$  內的每一个  $\alpha$  值, 都有正路管的一条确定的“母綫”与之对应, 而在这条母綫上只有曲綫  $C_1$  的一个点。因此, 对于每个  $\alpha$  值只有曲綫  $C_1$  上的一个点与之对应, 即曲綫  $C_1$  上各点的坐标是参数  $\alpha$  的函数。

$$W = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt.$$

按公式(7),在任何  $\alpha$  的情况下,我們都有

$$\delta W = W'(\alpha) \delta \alpha = \left[ \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right]_0^1.$$

将这等式在  $\alpha=0$  到  $\alpha=l$  的区間上对  $\alpha$  逐项积分之,我們便得到:

$$\begin{aligned} 0 = W(l) - W(0) &= \int_0^l \left[ \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right]_0^1 d\alpha = \\ &= \int_0^l \sum_{i=1}^n p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1 - \int_0^l \sum_{i=1}^n p_i^0 \delta q_i^0 - H_0 \delta t_0 = \\ &= \oint_{C_1} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t - \oint_{C_0} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t, \end{aligned}$$

即

$$\oint_{C_0} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t = \oint_{C_1} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t. \quad (11)$$

于是,得到以下的論断:当任一封閉迴路沿正路管作任意移动(还可以变形)时,沿此閉迴路的曲綫积分

$$I = \oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \quad (12)$$

保持其值不变,也就是說它是个积分不变量。我們把积分  $I$  叫做龐伽雷—卡当积分不变量。

現在来证明一个逆命題。設正路由一阶微分方程組

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= Q_i(t, q_j, p_j), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_j, p_j) \\ (i &= 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (13)$$

所确定。(这样的假设是很自然的,因为系统的运动应当由其初始数据  $q_i^0, p_i^0 (i=1, \dots, n)$  唯一决定。)此外,假设给出了龐伽雷-卡当积分(12)是由方程组(13)所确定的正路的积分不变量,也就是说,对于由这些正路所组成的任何管子,当包围这管子的封闭迴路上的点随此迴路沿管之母綫作任意移动时,沿此迴路的龐伽雷-卡当积分将保持其值不变。我們要证明函数  $H$  和函数  $Q_i, P_i$  之間有如下的关系:

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n), \quad (14)$$

即方程(13)是哈密頓正則方程,而其哈密頓函数則是  $I$  的积分号下表达式中的函数  $H$ 。

为证明此命题,我們在方程组(13)中再补增一个方程,以便引进一輔助变量(参数)  $\mu$ :

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \dots = \frac{dq_n}{Q_n} = \frac{dp_1}{P_1} = \dots = \frac{dp_n}{P_n} = \frac{dt}{1} = \pi d\mu. \quad (15)$$

这里,  $\pi = \pi(t, q_i, p_i)$  是增广相空間內点的任意函数。将方程组(15)积分,我們便得到与变量  $\mu$  和任意的初始数据  $q_i^0, p_i^0 (i=1, \dots, n)$  和  $t^0$  (当  $\mu=0$  时的数据)有关的函数形式所給出的  $q_i, p_i$  和  $t$  的表达式:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \varphi_i(\mu; q_j^0, p_j^0, t_0), \\ p_i &= \psi_i(\mu; q_j^0, p_j^0, t_0), \quad (i=1, \dots, n). \\ t &= \chi(\mu; q_j^0, p_j^0, t_0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

这是整个正路族的参数方程。因为我們所需要的仅仅是組成給定管子的那些正路,所以应当取曲綫  $C_0$  上的点  $M_0(q_j^0, p_j^0, t_0)$  作为始点,也就是说,应当将方程(16)中的  $q_j^0, p_j^0, t_0$  代之以

$$q_j^0(\alpha), p_j^0(\alpha), t_0(\alpha).$$

这样,我們便得到組成給定管子的那些正路的参数方程:

$$q_i = q_i(\mu, \alpha), \quad p_i = p_i(\mu, \alpha), \quad t = t(\mu, \alpha) \quad (17)$$

$$(i=1, \dots, n; 0 \leq \alpha \leq l);$$

这里, 一定的  $\alpha$  值对应于一定的正路(正路管的“母綫”), 而参数  $\mu$  的值則决定了这条正路上一定的点。

令  $\mu = \text{const}$ , 則在每条母綫上就得到一个点, 而在管子上則得一封閉曲綫。我們认为积分式(12)中的  $q_i$ ,  $p_i$  和  $t$  已用表达式(17)代入。于是, 积分  $I$  便成为参数  $\mu$  的函数, 而且对于每一个固定的  $\mu$  值, 它都是沿相应的閉曲綫  $\mu = \text{const}$  的曲綫积分。

根据积分  $I$  的不变性, 我們有

$$dI = 0.$$

这里字母  $d$  表示对参数  $\mu$  积分。在积分号下取微分, 即得

$$0 = \oint \sum_{i=1}^n (dp_i \delta q_i + p_i d\delta q_i) - dH \delta t - H d\delta t.$$

将  $d\delta q_i$  和  $d\delta t$  改写成  $\delta dq_i$  和  $\delta dt$ , 并沿閉迴路进行分部积分, 則得①:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint \sum_{i=1}^n (dp_i \delta q_i - \delta p_i dq_i) - dH \delta t + \delta H dt = \\ &= \oint \sum_{i=1}^n \left[ \left( dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right) \delta q_i + \left( -dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) \delta p_i \right] + \\ &\quad + \left( -dH + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \delta t \end{aligned}$$

或者, 根据(15)式, 将上式逐項除以  $d\mu = \frac{dt}{\pi}$ :

$$0 = \oint \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \left( P_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( -Q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] + \right.$$

① 运算  $d$  和运算  $\delta$  的手續是可以交换的, 因为它们是对各不相同的独立变量  $\mu$  和  $\alpha$  取微分的。此外, 当进行分部积分时, 由于积分路徑的始末两点重合, 所以被积出的部分等于零。因此, 对于任何两个函数  $u$  和  $v$ , 当取其沿封閉迴路的积分时恒有

$$\oint u \delta v = - \oint v \delta u.$$

$$+ \left( -\frac{dH}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) \delta t \Big\} \pi. \quad (18)$$

积分号下的表达式, 对于任意的因子  $\pi$  都应当是全微分\*, 而这只有当大括弧中的表达式等于零才可能。令此表达式等于零, 我們便得到:

$$P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

此即所需证者<sup>①</sup>。

由前面的論证可知, 龐伽雷-卡当积分的不变性可以作为力学的基本原理, 因为由这个不变性可以推出: 系統的运动由哈密頓正則方程所規定。

注. 在证明中, 我們曾引入了一个輔助变量  $\mu$ , 并利用了由曲綫族  $\mu = \text{const}$  中的一条轉到其中另一条时积分  $I$  的值保持不变的性质。由于函数  $\pi(t, q_i, p_i)$  的任意性, 曲綫族  $\mu = \text{const}$  实际上是包圍給定正路管的、不相交的任意閉曲綫族。如果不引进参数  $\mu$ , 而就以時間  $t$  作参数, 那么, 重复同样的論述, 我們就只是部分地利用了积分  $I$  的不变性(即对于由同一时刻的状态所組成的曲綫  $t = \text{const}$ , 积分  $I$  的不变性)而不能得到所需要的結果。

我們現在来比較仔細地討論一下龐伽雷-卡当积分的結構。

在龐伽雷-卡当积分(12)里, 時間  $t$  和坐标  $q_i$  具有同等地位, 而量  $-H$  (能量冠以負号)則起着相应冲量的作用。这是一个极其深刻的类比。

現在引入一个新的变量  $z$  对积分  $I$  施行变量变换; 这个新变量和原变量之間有如下关系:

$$z = -H(t, q_i, p_i). \quad (19)$$

由此关系解出  $p_i$ :

\* 因为(18)式中的积分迴路是任意的——譯者注。

① 我們还得到了恒等式  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ , 它是哈密頓正則方程的推論[見第 70 頁上的等式(20)]。

$$p_1 = -K(t, q_1, \dots, q_n, z, p_2, \dots, p_n), \quad (20)$$

則基本积分  $I$  在新变量之下可以写成:

$$I = \oint z \delta t + p_2 \delta q_2 + \dots + p_n \delta q_n - K \delta q_1. \quad (21)$$

于是, 在新变量之下, 积分  $I$  仍然具有龐伽雷—卡当积分的形式, 只不过現在起時間作用的是变量  $q_1$ , 而代替以前的能量  $H$  的則是帶有負号的冲量  $p_1$ , 即  $K$ 。因此, 根据以前的证明, 在新变量之下, 系統的运动应由如下的哈密頓微分方程組来描述:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt}{dq_1} &= \frac{\partial K}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial t}, \\ \frac{dq_j}{dq_1} &= \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j=2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

这里,  $q_1$  是独立变量。

我們以綫性振子为例來說明上述問題。对于綫性振子,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}.$$

我們取  $q$  作独立变量来建立正則方程。为此, 令

$$z = -\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}\right),$$

由此解出

$$p = \sqrt{m} \sqrt{-2z - cq^2}.$$

于是, 在所給情况下,

$$K = -\sqrt{m} \sqrt{-2z - cq^2}.$$

相应的正則方程(22)可以写成:

$$\frac{dt}{dq} = \sqrt{\frac{m}{c}} \frac{1}{\sqrt{-2\frac{z}{c} - q^2}}, \quad \frac{dz}{dq} = 0.$$

由第二个方程得  $z = \text{const} = -h$ 。积分第一个方程求得  $t$ :

$$\omega t = \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2h}{c} - q^2}} - \alpha,$$

其中  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ , 而  $\alpha$  是任意常数。上式也可以写成



$$\omega t + \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{c}{2h}} q,$$

即

$$q = A \sin(\omega t + \alpha) \left( A = \sqrt{\frac{2h}{c}} \right).$$

### § 19. 基本积分不变量的流体动力学解释 · 湯姆孙和亥姆霍兹关于环量和涡量的定理

为了具体说明积分不变量的概念, 我們来看在具有势  $\Pi(t, x, y, z)$  的外力作用下, 理想流体的运动。根据流体动力学<sup>①</sup> 我們知道, 这种流体质点的运动方程有如下形式:

$$\alpha = -\text{grad}\Pi - \frac{1}{\rho} \text{grad}p, \quad (1)$$

式中  $\alpha$  是质点的加速度,  $\rho$  和  $p$  是它的密度和压力, 而  $\Pi$  乃是单位质量的势。

設  $\rho$  和  $p$  之間有函数关系  $\rho = f(p)$  (这种关系特别是在等温流动过程中成立)。于是, 当令

$$\tilde{\Pi} = \Pi + \int \frac{dp}{\rho}$$

时, 方程(1)便可以写成

$$\alpha = -\text{grad}\tilde{\Pi}. \quad (1')$$

上式表明流体质点的运动和质量为  $m=1$  的质点在势場  $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(t, x, y, z)$  中的运动是一样的。因此, 对于流体质点的运动, 龐伽雷—卡当积分也是积分不变量, 它在給定情况下有如下形式:

$$I = \oint u\delta x + v\delta y + w\delta z - E\delta t, \quad (2)$$

其中  $u, v, w$  是流体质点的速度分量 [它在所給情况 ( $m=1$ ) 下就是冲量  $p_i$ ],  $E$  是能量, 由下式决定:

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \tilde{\Pi}(t, x, y, z). \quad (3)$$

因此, 在七維空間  $(t, x, y, z, u, v, w)$  里, 沿任意封閉迴路所取的积分(2),

① 見, 例如, 柯欽、吉別里、勞澤著“理論流体力学”, 第一卷, 第一分册, 第 41 頁, 曹俊等譯, 高等教育出版社出版, 1956。

当迴路上的点按照流体运动而作任何移动时,都将保持其值不变。根据公式(1'), 流体运动应适合如下的一组微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

在我們所討論的特殊情況下, 方程(4)就是哈密頓正則方程。

如果給出了一个具体的流体运动, 它的速度場已知, 即函数  $u(t, x, y, z)$ ,  $v(t, x, y, z)$ ,  $w(t, x, y, z)$  是已知的, 則积分(2)就可以看作是增广坐标空間(四維空間  $t, x, y, z$ ) 中的积分。当使积分迴路沿流体质点的运动路徑作任意移动时, 这个积分的值是不变的, 即积分

$$\oint_C u(t, x, y, z)dx + v(t, x, y, z)dy + w(t, x, y, z)dz - E(t, x, y, z)dt \quad (5)$$

是关于具有給定速度場的流体运动在增广坐标空間中的积分不变量。

当以同一时刻( $t = \text{const}$ )的状态組成积分迴路时, 积分(2)便具有

$$\oint_C u\delta x + v\delta y + w\delta z \quad (6)$$

的形式。

在流体动力学里, 这个积分叫做沿迴路  $C$  的速度环量。于是, 我們順便得到了关于速度环量守恒的湯姆孙定理: 在时刻  $t_1$  組成积分迴路的流体质点轉移到它們在任意的另一时刻  $t_2$  所占据的位置时, 环量(6)保持其值不变。

如果某些流体质点在某一时刻組成一条綫, 則同样的这些质点, 在另一时刻仍然組成一条綫。往后我們將用到随時間而移动的、变形的“流体綫”以及相类似的“流体面”等概念。

由环量守恒定理可以断定, 每一个封閉的流体綫都和一定的环量相对应。

我們注意, 根据司托克斯公式<sup>①</sup>, 积分(6)可以写成沿曲面  $S$  (由迴路  $C$  所圍成的曲面)的积分形式:

<sup>①</sup> 見, 例如, Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., 1956, т. 2, гл. 22, § 4. (或微积分学教程, 第三卷, 第二分册, 第十七章, 第 614 节; 吳亲仁等譯, 人民教育出版社。——譯者)

$$\iint_S \xi \delta y \delta z + \eta \delta z \delta x + \zeta \delta x \delta y, \quad (7)$$

其中

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8)$$

是某一矢量  $\Omega$  的分量, 这矢量叫做速度涡量(旋度)或简称涡量。积分(7)常写成

$$\iint_S \Omega_n dS \quad (7')$$

的形式, 其中  $\Omega_n$  是矢量  $\Omega$  在曲面法线方向的投影,  $dS$  为曲面  $S$  的元面积。由此可见, 积分(7)给出了通过曲面  $S$  的涡流量。由速度环量守恒定理立即可得涡流守恒定理: 每一有界流体面都和穿过此面一定的涡流量相对应①。

具有给定速度场的流体运动决定于微分方程组:

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = v(t, x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = w(t, x, y, z). \quad (9)$$

对于方程组(9)的积分曲线而言, 积分(5)是积分不变量。

现在我们提出这样一个问题: 除方程组(9)而外, 还有那些形式为

$$\frac{dx}{P(t, x, y, z)} = \frac{dy}{Q(t, x, y, z)} = \frac{dz}{R(t, x, y, z)} = \frac{dt}{U(t, x, y, z)} \quad (10)$$

的微分方程组具有这一性质? 也就是说, 还有那些方程组具有积分(5)这样的积分不变量?

为了回答这个问题, 我们在方程组(10)的积分曲线上引进一个参数  $\mu$ , 同时, 像在前一节中所做的那样, 令(10)式的比值等于乘积  $\pi(t, x, y, z) d\mu$ , 这里的  $\pi$  是任意函数。我们来看方程组(10)的积分曲线管和包围这管子的封闭回路  $C$ , 对于这回路  $\mu = \text{const} = c$ 。注意, 沿回路  $C$ , 积分(5)的值和值  $\mu = c$  无关。

以字母  $d$  表示对  $\mu$  的微分, 并重复第 98 页上的推导, 则由公式(8)便得到:

$$\begin{aligned} 0 &= d \oint u \delta x + v \delta y + w \delta z - E \delta t = \\ &= \oint du \delta x + dv \delta y + dw \delta z - dE \delta t - \delta u dx - \delta v dy - \delta w dz + \end{aligned}$$

① 由此可见, 特别是在理想流体的流体体积中, 涡量既不能消失, 也不能产生 (当然是在力有势, 而且关系  $\rho = f(p)$  成立的情况下)。

$$+ \delta E dt = \oint \left[ -\zeta dy + \eta dz + \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} \right) dt \right] \delta x + [*] \delta y +$$

$$+ [*] \delta z + \left[ -dE - \frac{\partial u}{\partial t} dx - \frac{\partial v}{\partial t} dy - \frac{\partial w}{\partial t} dz + \frac{\partial E}{\partial t} dt \right] \delta t,$$

式中  $\delta y$  和  $\delta z$  的系数可由  $\delta x$  的系数经字母作循环置换后而得到。

将  $dx, dy, dz, dt$  分别用(10)式的相应分母和  $\pi(t, x, y, z)d\mu$  的乘积来代替, 则因积分号下的表达式对于任意选取的函数  $\pi(t, x, y, z)$  都是全微分, 所以它应当恒等于零。因之, 方括弧中的表达式(将其中的四个微分  $dx, dy, dz, dt$  分别以与其成比例的量  $P, Q, R, U$  代替之后)等于零, 即如下的等式成立。

$$\left. \begin{aligned} \eta R - \zeta Q + \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} \right) U &= 0, \\ \zeta P - \xi R + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y} \right) U &= 0, \\ \xi Q - \eta P + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} \right) U &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} \right) P + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y} \right) Q + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} \right) R = 0. \quad (12)$$

当  $U \neq 0$  时关系式(12)是等式(11)的推论, 而当  $U = 0$  时(12)则是(11)和(1')的推论\*。

\* 由(1')的第一个投影式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial x}$$

便有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial x}.$$

利用(8)式可将它写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = v\zeta - w\eta$$

的形式。同理可得:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y} = w\xi - u\zeta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} = u\eta - v\xi.$$

于是, 当  $U = 0$  时, 利用(11)式便有

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} \right) P + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y} \right) Q + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} \right) R &= \\ &= (v\zeta - w\eta)P + (w\xi - u\zeta)Q + (u\eta - v\xi)R = \\ &= u(\eta R - \xi Q) + v(\zeta P - \xi R) + w(\xi Q - \eta P) = 0. \end{aligned}$$

——译者注

等式(11)和方程(10)一起决定了所有那些以积分(5)为其积分不变量的微分方程组。我们来找其中  $U=0$  (即  $dt=0$ ) 的那些组。此时, 由(11)式便有:

$$\frac{P}{\xi} = \frac{Q}{\eta} = \frac{R}{\zeta},$$

且方程组(10)具有如下形式:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dt}{0}. \quad (13)$$

方程组(13)的积分曲线叫做涡线。

因此, 涡线的微分方程组是唯一的一组以积分(5)为其积分不变量, 同时又有  $dt=0$  的方程①。

由此结论可以得出一个重要推论。

在空间  $(x, y, z, t)$  中取任意一根涡线管和围绕这根管子的两条回路  $C_1$  和  $C_2$  (图 34)。根据积分(5)对于涡线的不变性我们便有

$$\oint_{C_1} u\delta x + v\delta y + w\delta z - E\delta t = \oint_{C_2} u\delta x + v\delta y + w\delta z - E\delta t.$$

现在任意给定一个数  $\tau > 0$ , 将空间  $(x, y, z, t)$  的每一点都由其原来位置移到  $(x', y', z', t+\tau)$  处; 这里  $x', y', z'$  是在时刻  $t$  坐标为  $x, y, z$  的流体质点于时刻  $t+\tau$  时所占据位置的坐标。在这样的移动之下, 涡线就沿着流体质点的轨迹转变为某一条新的线, 我们将这条新线叫做“移位线”。而原来的涡线管则转变为移位线管, 回路  $C_1$  和  $C_2$  则变成回路  $D_1$  和  $D_2$  (见图 34)②。但这样的移动是借流体质点的运动来实现的, 所以在移动时积分(5)不改变自己的值, 即

$$\oint_{C_1} = \oint_{D_1}, \quad \oint_{C_2} = \oint_{D_2}.$$

因之, 有

$$\oint_{D_1} = \oint_{D_2}. \quad (14)$$

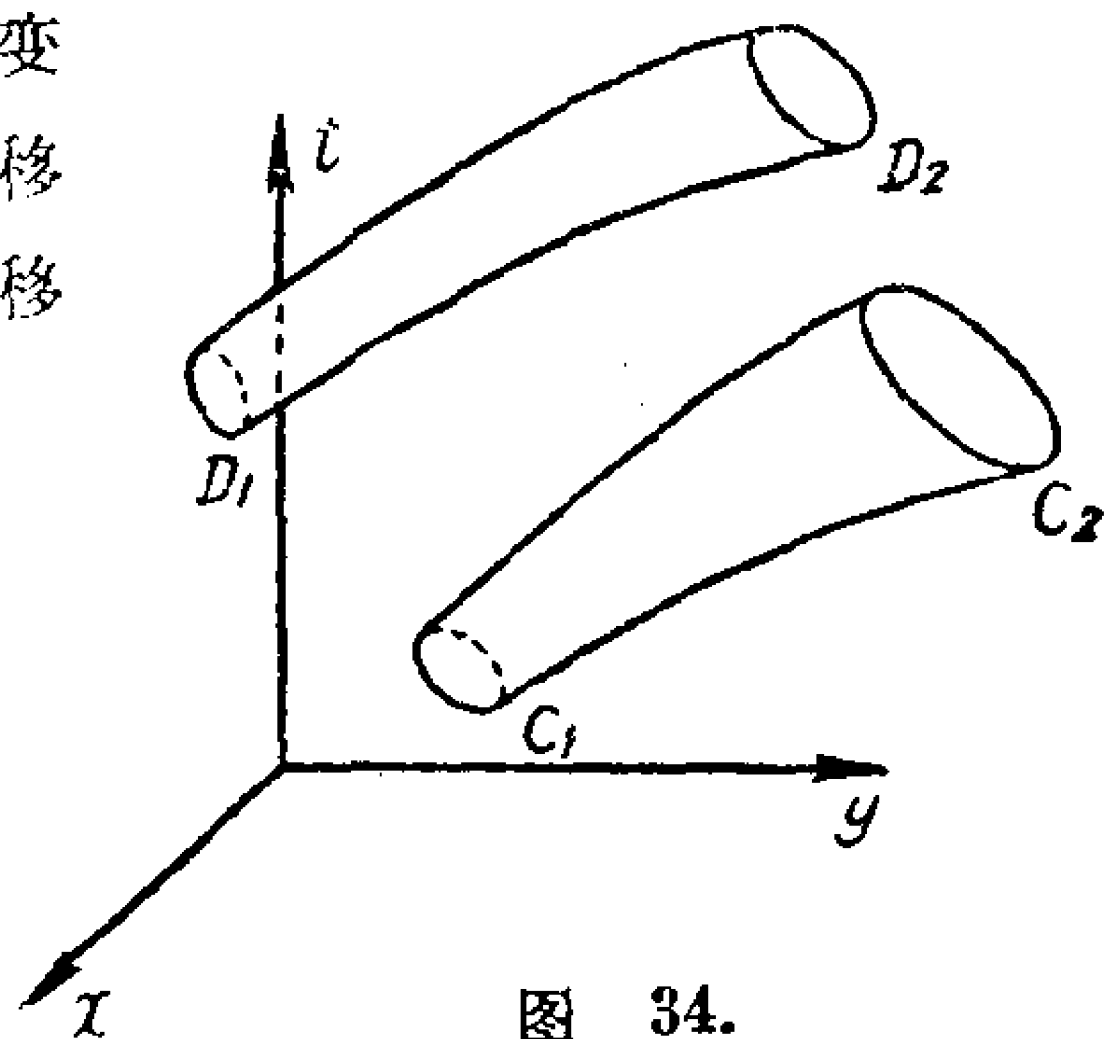


图 34.

① 积分(5)也是那些  $dt \neq 0$  的其他方程组[例如方程组(9)]的积分不变量。

② 我们这里所讨论的涡线管是位于四维空间  $(x, y, z, t)$  里的, 但在图 34 上并未划出  $z$  轴。

$D_1$  和  $D_2$  可以看作是包围移位綫管的任意两条迴路。因此, 等式(14)表明积分(5)对于“移位綫”是不变量。同时, 沿每条移位綫如同沿渦綫一样, 也有  $dt=0$ 。因之, 移位綫具有前所指出的仅为渦綫才可能具有的那种性质。这也就是说, 移位綫是渦綫。同时, 由于移动的时间  $\tau$  是任意的。所以当构成渦綫的流体质点运动时, 渦綫永远保持为渦綫。

由此我們得到亥姆霍兹定理, 这定理可以这样来表述: 渦綫是流体綫。

順便还得到如下結論: 每根渦管都有一定的“强度”, 这个“强度”由积分

$$\oint_{\sigma} u\delta x + v\delta y + w\delta z - E\delta t \quad (15)$$

来决定。

当流体运动时, 这个强度的大小是不变的。当取同一时刻  $t(\delta t=0)$  的渦綫管时, 强度(15)就是沿迴路  $C$  的速度环量:

$$\oint_C u\delta x + v\delta y + w\delta z.$$

## § 20. 广义保守系統 · 惠特克方程 · 雅科毕方程 · 莫培督—拉格朗日最小作用量原理

我們来考察广义保守系統, 即函数  $H$  不显含时间  $t$  的任意系統(也可能是非自然系統)。这种系統有广义能量积分

$$H(q_i, p_i) = h. \quad (1)$$

这个积分和当  $q_1$  是循环坐标—— $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$  时所出現的冲量守

恒积分  $p_1 = c$  是类似的。

鉴于时间变量  $t$  和循环坐标之間的这种类似性, 可以期望利用能量积分(1)使运动微分方程的阶数降低二阶。

为此目的, 我們来看普通的 (非增广的)  $2n$  維相空間;  $q_i, p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 是这空間中点的坐标。我們仅限于討論相空間里那样一些点, 它們的坐标滿足常数  $h$  有固定值的方程(1)。換句話說, 我們只限于討論总能量  $H$  等于給定值  $h$  的那些系統状态。

此时, 由于按等式(1)有:

$$\oint H \delta t = h \oint \delta t = 0,$$

故基本积分不变量  $I$  可以写成

$$I = \oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \quad (2)$$

的形式。

现在将冲量中的某一个, 譬如  $p_1$ , 从方程(1)中解出来:

$$p_1 = -K(q_1, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h). \quad (3)$$

将解得之表达式代入积分(2)中的  $p_1$ , 我们便得到

$$I = \oint \sum_{j=2}^n p_j \delta q_j - K \delta q_1. \quad (4)$$

如果将  $q_j$  和  $p_j$  ( $j=2, \dots, n$ ) 看作基本坐标和冲量, 而将变量  $q_1$  看作起着时间作用的变量(代替函数  $H$  的有函数  $K$ ), 则积分不变量(4)仍然具有庞伽雷—卡当积分的形式。因之, 系统的运动应当满足如下的  $2n-2$  阶的哈密顿微分方程组(见 §18):

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j=2, \dots, n). \quad (5)$$

这组方程曾由惠特克得到, 被称为惠特克方程。

将惠特克方程组积分之, 我们便得到以变量  $q_1$  和任意常数  $h, c_1, \dots, c_{2n-2}$  的函数形式表出的量  $q_j$  和  $p_j$  ( $j=2, \dots, n$ ):

$$q_j = \varphi_j(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}), \quad p_j = \psi_j(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}) \\ (j=2, \dots, n). \quad (6)$$

再将所得之表达式(6)代入公式(3), 便得到  $p_1$  的类似表达式:

$$p_1 = \psi_1(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}). \quad (6')$$

这样, 相空间中的所有轨道(即运动的几何图象)都完全被确定了。

坐标和时间  $t$  之间的关系可由方程  $\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$  用求积法得到:



$$t = \int \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} + c_{2n-1}; \quad (7)$$

这里, 偏导数  $\frac{\partial H}{\partial p_1}$  中的一切变量都要按等式(6)和(6')以  $q_1$  表出。

哈密顿型的惠特克方程组(5)可以用和它等价的拉格朗日型方程组

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial P}{\partial q'_j} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \quad (j=2, \dots, n) \quad (8)$$

来代替, 其中  $q'_j = \frac{dq_j}{dq_1}$ , 而类似于拉格朗日函数的函数  $P$  和类似于

哈密顿函数的函数  $K$  则以如下等式相联系<sup>①</sup>:

$$P = P(q_1, \dots, q_n, q'_2, \dots, q'_n) = \sum_{j=2}^n p_j q'_j - K. \quad (9)$$

在这关系式的最后部分, 冲量  $p_j$  应当以其通过

$$q'_2 = \frac{dq_2}{dq_1}, \dots, q'_n = \frac{dq_n}{dq_1}$$

表出的表达式来代替, 而这些表达式可以从(5)式的前  $n-1$  个方程得到。

现在从等式(3)和(9)出发, 把函数  $P$  的表达式改写成如下形式:

$$P = \sum_{j=2}^n p_j q'_j + p_1 = \frac{1}{\dot{q}_1} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = \frac{1}{\dot{q}_1} (L + H). \quad (10)$$

在自然系统(即通常的保守系统)的情况下,  $L = T - \Pi$ ,  $H = T + \Pi$ ; 因而,

$$P = \frac{1}{\dot{q}_1} (L + H) = \frac{2T}{\dot{q}_1}, \quad (11)$$

而且动能  $T$  可以写成

<sup>①</sup> 見第 67 頁上的等式(8)。

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \dot{q}_1^2 G(q_1, \dots, q_n, q'_2, \dots, q'_n) \quad (12)$$

的形式, 其中

$$G(q_1, \dots, q_n, q'_2, \dots, q'_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q'_i q'_k \quad (q'_1 = 1). \quad (13)$$

由等式(1)和(12)得

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{h - \Pi}{G}}, \quad (14)$$

于是函数  $P$  就可以写成如下形式:

$$P = \frac{2T}{\dot{q}_1} = 2\sqrt{G(h - \Pi)}. \quad (15)$$

当函数  $P$  取(15)式的形式时, 微分方程(8)称为雅科毕方程①。

将雅科毕方程积分之, 我們便得到坐标空間  $(q_1, \dots, q_n)$  中的全部軌道:

$$q_j = \varphi_j(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}). \quad (16)$$

坐标和时间变量之间的联系可借求积方法由关系式(14)得到:

$$t = \int \sqrt{\frac{G}{h - \Pi}} dq_1 + c_{2n-1}. \quad (17)$$

我們現在轉来建立莫培督—拉格朗日最小作用量原理。由于方程(8)是拉格朗日型的, 所以由它可以导出变分原理, 按这原理, 对于正路应当有

$$\delta W^* = 0, \quad (18)$$

式中

$$W^* = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P dq_1 \quad (19)$$

① 这組方程是由德国数学家 K. 雅科毕导出的, 曾发表在他的經典性著作——“动力学讲义”一书中; 該书出版于 1886 年(有俄譯本, ГОУТН, 1936)。在非自然的广义保守系統的情况下, 雅科毕方程里的函数  $P$  由公式(9)来确定。

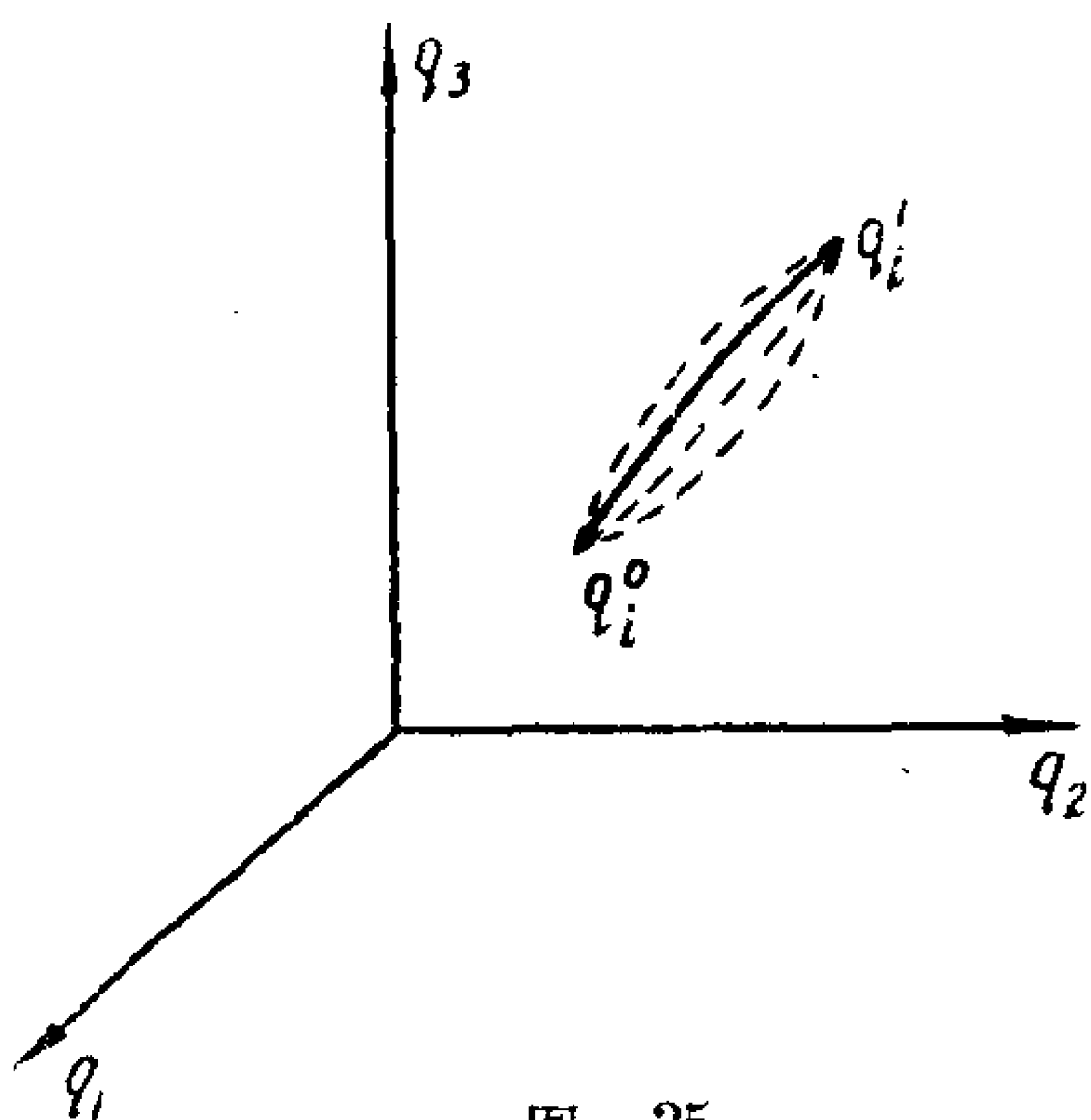


图 35.

叫做拉格朗日作用量。这里进行比较的是广义保守系统的所有这样一些运动：它们的总能量有同一的值  $h$ ，而且在这样的运动中，系统由给定的初始位置  $q_i^0$  转移到给定的末了位置  $q_i^1$  (图 35)。但时刻  $t_0$  和  $t_1$  却不是固定的，当由正路转到旁路时它们可能都有变更<sup>①</sup>。

利用等式(10)来表示积分(19)的函数  $P$ ，我们便得到拉格朗日作用量  $W^*$  和哈密顿作用量  $W$  之间的关系：

$$W^* = \int_{t_0}^{t_1} (L + H) dt = \int_{t_0}^{t_1} L dt + h \int_{t_0}^{t_1} dt = W + h(t_1 - t_0). \quad (20)$$

在普通保守系统的情况下，可以利用表达式(11)将拉格朗日作用量写成如下形式：

$$W^* = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{v=1}^N m_v v_v^2 dt = \sum_{v=1}^N \int_{s_v^0}^{s_v^1} m_v v_v ds_v. \quad (21)$$

上面得到的这个  $W^*$  的表达式表明：拉格朗日作用量  $W^*$  等于系统各质点的动量矢量沿系统相应位移所作之功。

变分原理(18)称为莫培督-拉格朗日最小作用量原理<sup>②</sup>。

作为一个例子，我们拿费马的光学原理和莫培督-拉格朗日最小作用量

① 等式(18)表明拉格朗日作用量沿正路有逗留值。解决作用量  $W^*$  沿正路有最小值的问题完全和哈密顿原理一样，也要引入动焦点。有关这个问题更详细的讨论见 Суслов Г. К., Теоретическая механика, § 248。

② 这个原理最先是莫培督于 1747 年以比较含糊的措词提出的。原理严格的表述和论证是由拉格朗日于 1760 年给出的。

原理来比較一下<sup>①</sup>。

根据費馬原理, 光綫在非均匀介质中的傳播, 是按着使其通过時間

$$t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{v} \quad (22)$$

取极小值的路徑行进的。

当在介质中的每一点上都引进一个折射系数  $n = \frac{c}{v}$  (真空里的光速  $c$  和給定介质中的光速  $v$  之比) 时, (22) 式就可以写成

$$t = \frac{1}{c} \int_{s_0}^s n ds$$

的形式, 其中  $n$  是介质各点的函数。于是, 費馬原理可以写成

$$\delta \int_{s_0}^s n ds = 0. \quad (23)$$

另一方面, 对于质量为  $m$  的一个质点而言, 由于  $\frac{1}{2}mv^2 + \Pi = h$ , 故由莫培督-拉格朗日原理便有

$$\delta \int_{s_0}^s mv ds = \sqrt{m} \delta \int_{s_0}^s \sqrt{2(h - \Pi)} ds = 0. \quad (24)$$

由公式(23)和(24)可見, 当

$$\Pi = h - \frac{1}{2}n^2 \quad (25)$$

时, 光綫的軌道和质点的軌道完全一样。

如果将地面附近的折射指数  $n$  取作随高度  $z$  而減小的綫性函数:

$$n = n_0 \left( 1 - k \frac{z}{H} \right), \quad (26)$$

其中  $H$  是大气层高度, 則当略去与  $\left( \frac{z}{H} \right)^2$  同阶的小量之后, 即得

$$\Pi = h - \frac{1}{2}n_0^2 \left( 1 - 2k \frac{z}{H} \right) = c + gz, \quad (27)$$

其中

$$c = h - \frac{1}{2}n_0^2, \quad g = \frac{kn_0^2}{H}. \quad (28)$$

<sup>①</sup> 見, 例如, Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Л., 1938, 93-94頁。

公式(27)决定了近地面处随  $z$  值变化的重力之势。

因此, 当折射指数  $n$  按上述方式随高度变化时, 光线将沿着以铅垂线为轴的抛物线传播。

## § 21. 惯性运动 · 保守系统的任意运动与测地线的关系

假设给定了一个任意的平稳系统, 它的动能等于

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (1)$$

若以如下的正定二次(微分)型所定义的平方弧长  $ds^2$  作为坐标空间  $(q_1, \dots, q_n)$  的度量:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(q_1, \dots, q_n) dq_i dq_k, \quad (2)$$

则联结坐标空间中两点  $(q_i^0)$  和  $(q_i)$  的曲线弧长可由等式

$$s = \int_{(q_i^0)}^{(q_i)} ds = \int_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{\sum_{i,k=1}^n a_{ik} dq_i dq_k} \quad (3)$$

来确定。

将公式(1)和(2)加以比较, 便得到系统运动时的动能

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (4)$$

即在度量(2)之下, 系统的动能永远和  $n$  维坐标空间中“表示点”的动能相同, 只要认为这个点的质量  $m=1$ 。

我们现在来看系统的惯性运动 ( $\Pi=0$  的情况)。在这种运动中, 表示点的一切可能轨道都叫做[关于度量(2)的]测地线。按公式(4), 由能量积分

$$T = h$$

得

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2h}, \quad (5)$$

即与惯性运动(以及动能为常数  $h$  的任何运动)相对应的是坐标空间  $(q_1, \dots, q_n)$  中表示点的匀速运动, 其速度为  $\sqrt{2h}$ 。

按最小作用量原理, 测地线乃是变分问题

$$\delta W^* = 0 \quad (6)$$

的极值曲綫①, 这里的  $W^*$  是拉格朗日作用量。但在所討論的情况下, 无论是正路还是旁路, 它們都有  $h$  为固定值的能量积分  $T = h$ 。因此,

$$W^* = \int_{t_0}^t 2T dt = 2h(t - t_0) = \sqrt{2h} s, \quad (7)$$

其中  $s = \sqrt{2h}(t - t_0)$  是坐标空間  $(q_1, \dots, q_n)$  中曲綫的长度。

变分問題(6)取如下形式:

$$\delta s = \delta \int_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{\sum_{i,k=1}^n a_{ik} dq_i dq_k} = 0. \quad (8)$$

因此, 測地綫的标志是: 和其它与測地綫有共同端点的曲綫②相比較, 測地綫的弧长有极值(确切地說, 是逗留值)(見第 110 頁上的图 35)。

在拉格朗日作用量沿正路有极小值的情况下, 測地綫的弧长小于和測地綫有共同端点的任何其他曲綫的弧长③。

因此, 測地綫也叫做空間的短程綫。

現在来看保守系統, 即具有不显含時間  $t$  的势能  $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_n)$  的平稳系統。在这情况下, 按前节的公式(15)和(19)則有

$$W^* = 2 \int_{q_1^0}^{q_1} \sqrt{G(h - \Pi)} dq_1 = 2 \int_{q_i^0}^{q_i} \sqrt{(h - \Pi) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dq_i dq_k}. \quad (9)$$

因此, 保守系統具有給定总能量值  $h$  的运动, 在坐标空間里, 是沿着变分問題的极值曲綫(具有固定端点的):

$$\delta \int_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{(h - \Pi) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dq_i dq_k} = 0 \quad (10)$$

而实现的。

从公式(10)和公式(8)的比較中可以見出, 对于保守系統而言, 正路軌道乃是以

① 即  $W^*$  取逗留值的那些曲綫。

② 在莫培督-拉格朗日原理中, 对于正路和旁路所要求的“等能量性”并没有对坐标空間中的比較曲綫加上任何限制; 这个要求仅仅限制了表示点的速度罢了。

③ 当測地綫的两端充分接近时, 这結論总是对的。

$$ds_1^2 = (h - \Pi) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dq_i dq_k \quad (11)$$

为度量的空间的测地线。

## § 22. 龐伽雷通用积分不变量 · 李华中定理

現在我們来看沿着由系統在同一时刻的状态所組成的迴路  $C$

的积分  $I = \oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t$ 。以超平面  $t = \text{const}$  割截正路管时

(見第 95 頁上的图 33), 便得到这样的迴路。对于这样的迴路  $\delta t = 0$ , 因而基本积分不变量取如下形式:

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i. \quad (1)$$

这个积分最先是由龐伽雷提出的。以后卡当在引进了一个补充項  $-H \delta t$  之后, 又将这个积分推广到由系統的非同时状态所組

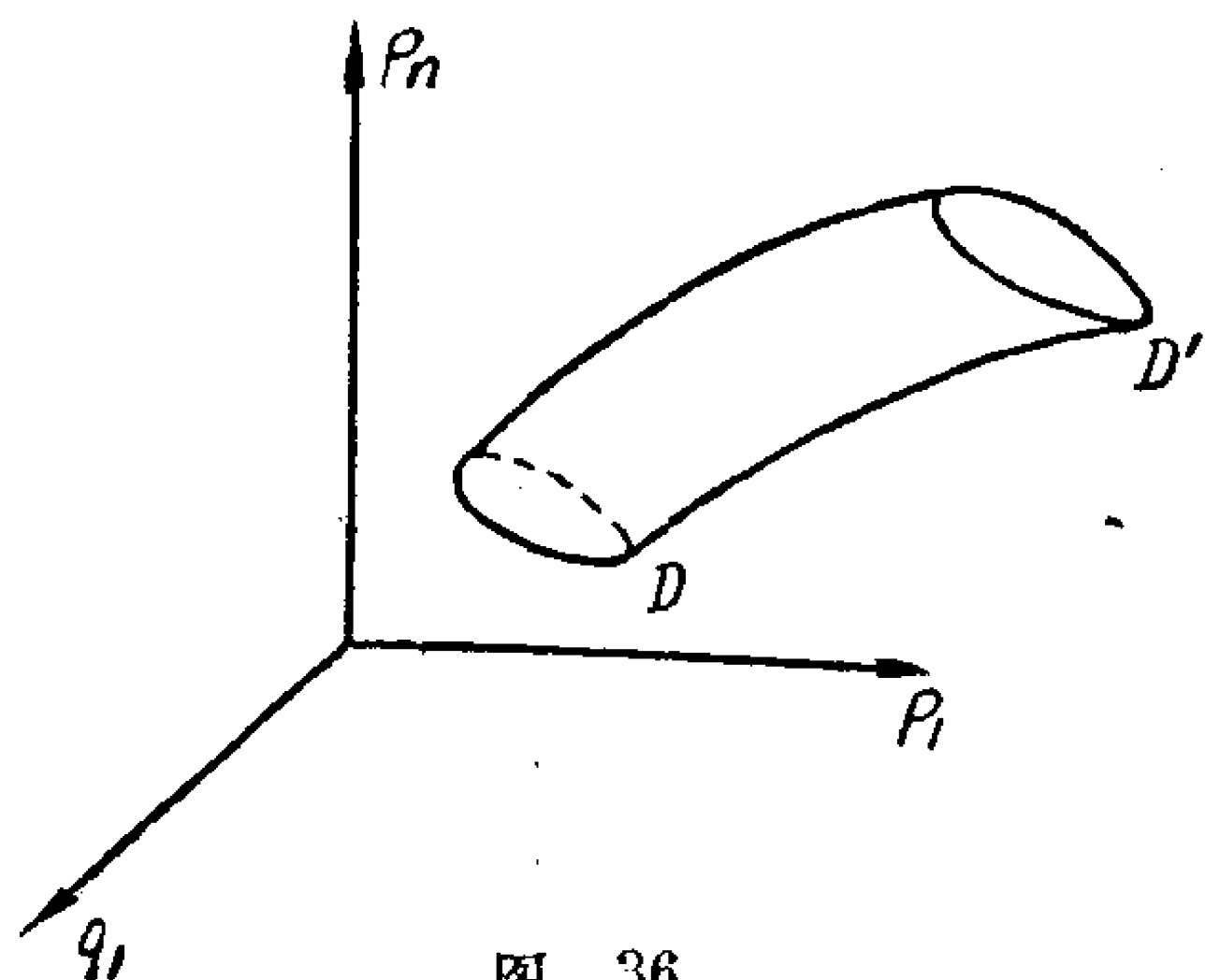


图 36.

成的迴路上。

当迴路  $C$  沿正路管轉移到仍然是由同一时刻的状态所組成的另一迴路  $C'$  时, 龐伽雷积分不变量  $I_1$  保持其值不变。在普通的 (即非增广的)  $2n$  維相空間  $(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)$  中来討論积分  $I_1$  是很

方便的。在这个空間里, 和迴路  $C$  及  $C'$  (图 33) 相对应的則是包圍着“正”軌道管的迴路  $D$  和  $D'$  (图 36); 同时

$$\oint_D \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \oint_{D'} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i.$$



我們注意，迴路  $D$  和  $D'$  中有一个，例如  $D$ ，是可以完全任意选取的。可以认为迴路  $D$  上的各点乃是系統在同一时刻  $t$  的不同状态；而系統在时刻  $t'$  的相应状态則构成迴路  $D'$ 。

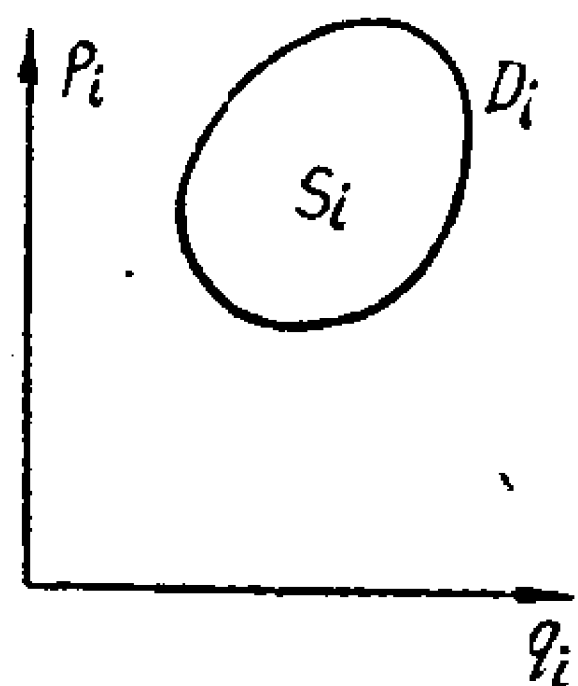


图 37.

代替相空間，我們分別来看  $n$  个相平面  $(q_i, p_i)$  ( $i=1, \dots, n$ )。将相空間中任意的封閉迴路  $D$  投影在这些平面上(图 37)，則得迴路  $D_i$  ( $i=1, \dots, n$ )。对于任何  $i$  我們都有

$$\oint_D p_i \delta q_i = \oint_{D_i} p_i \delta q_i = \pm S_i \quad (i=1, \dots, n), \quad (2)$$

其中  $S_i$  是迴路  $D_i$  在平面  $(q_i, p_i)$  上所包圍的面积 ( $i=1, \dots, n$ )。迴路  $D$  的环繞方向决定了在投影  $D_i$  上的环繞方向。公式(2)中  $S_i$  前面的正負号是这样定的：若环繞迴路  $D_i$  的方向是順时針的(即  $p_i$  軸到  $q_i$  軸的最小轉角方向)，就取正号，反之，就取負号。

于是，

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^n \pm S_i. \quad (3)$$

因之，当系統运动时，迴路  $D$  和  $D_i$  都在改变，面积  $S_i$  也随之而变，但这些面积的代数和(3)却是不变的。这就是龐伽雷积分不变性的几何意义。

在  $I_1$  的表达式中不出現  $H$ 。因此，龐伽雷积分  $I_1$  对于任何哈密頓方程組都是不变量。因之，积分  $I_1$  叫做通用积分不变量。

不难证明如下的論断：

若积分  $I_1$  是某微分方程組

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_k, p_k), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_k, p_k) \quad (4)$$

$$(i=1, \dots, n)$$

的不变量, 則方程組(4)是哈密頓型的。

事实上, 在此情况下, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} I_1 = \oint \sum_{i=1}^n \left( \frac{dp_i}{dt} \delta q_i + p_i \frac{d}{dt} \delta q_i \right) = \\ &= \oint \sum_{i=1}^n \left( \frac{dp_i}{dt} \delta q_i + p_i \delta \frac{dq_i}{dt} \right) = \oint \sum_{i=1}^n \left( \frac{dp_i}{dt} \delta q_i - \frac{dq_i}{dt} \delta p_i \right) = \\ &= \oint \sum_{i=1}^n (P_i \delta q_i - Q_i \delta p_i). \end{aligned}$$

由此可知, 积分号下的表达式必定是某个函数  $-H(t, q_k, p_k)$  的虛全微分<sup>①</sup>:

$$\sum_{i=1}^n (P_i \delta q_i - Q_i \delta p_i) = -\delta H(t, q_k, p_k),$$

即

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n).$$

这就是所要证的。

我們再介紹几个名詞: 龐伽雷-卡当积分  $I$  和龐伽雷积分  $I_1$  都叫做一阶相对积分不变量。“相对”一詞是指积分区域是一条封閉迴路; 而一阶乃指在积分号下的表达式中, 微分的出現是綫性的。应当注意, 利用司托克斯公式可将一阶相对积分不变量  $I_1$  写成二阶絕對积分不变量的形式:

$$\oint_{(D)} \sum_{i=1}^n A_i \delta x_i = \iint_S \sum_{i < k}^{1 \dots n} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \delta x_i \delta x_k, \quad (5)$$

① 这里,  $\delta H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right)$ 。(虛全微分的“虛”字是指将  $t$  固定的意

思。——譯者注)

上式右端的积分展布在封閉迴路  $D$  所圍成的曲面  $S$  上。

将此公式用于积分  $I_1$  便得到:

$$I_1 = \iint \sum_{i=1}^n \delta p_i \delta q_i.$$

已經知道, 在  $2n$  維相空間中, 存在着如下的奇数阶通用相对积分不变量  $I_{2k-1}$  和偶数阶通用绝对积分不变量  $J_{2k}$ :

$$I_1 = \oint \sum p_i \delta q_i = J_2 = \iint \sum \delta p_i \delta q_i,$$

$$I_3 = \oint \oint \sum p_i \delta q_i \delta p_k \delta q_k = J_4 = \iiint \sum \delta p_i \delta q_i \delta p_k \delta q_k,$$

.....

$$J_{2n-1} = \oint \cdots \oint \sum p_{i1} \delta q_{i1} \cdots \delta p_{in} \delta q_{in} = J_{2n} = \int \cdots \int \delta p_{i1} \delta q_{i1} \cdots \delta p_{in} \delta q_{in}.$$

1947 年中国学者李华宗曾证明了这些通用积分不变量的唯一性。他指出, 任何其他的通用积分不变量仅仅和上列积分之一相差一个常数因子<sup>①</sup>。

后面我們將要用到关于一阶积分不变量的李华中定理。

**李华宗定理.** 若

$$I' = \oint \sum_{i=1}^n [A_i(t, q_k, p_k) \delta q_i + B_i(t, q_k, p_k) \delta p_i]$$

是通用相对积分不变量, 則

$$I' = c I_1, \quad (6)$$

这里  $c$  是常数,  $I_1$  是龐伽雷积分。

**证明.** 我們就  $n=1$  的情况来证明这个定理。設  $I' = \oint A(t, q, p) \delta q + B(t, q, p) \delta p$  是通用积分不变量。积分是沿相平面  $(q, p)$  上的封閉迴路取的。另外, 还假設給定了任意一組哈密頓型的微分方程, 它的哈密頓函数是  $H(t, q, p)$ , 即:

<sup>①</sup> Hwa-Chung Lee, Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, ser. A, v. LXII, 1947, 237—247 頁。

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (7)$$

这组方程的通解有如下形式:

$$q = q(t, q_0, p_0), \quad p = p(t, q_0, p_0), \quad (8)$$

其中  $q_0, p_0$  是当  $t = t_0$  时  $q, p$  的初值。

令

$$q = q_0(\alpha), \quad p = p_0(\alpha) \quad (9)$$

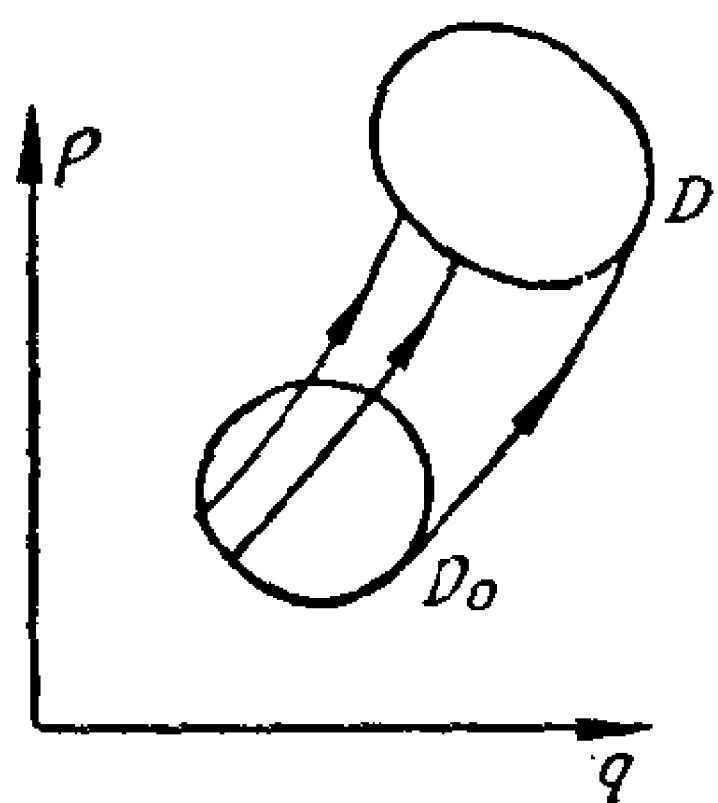


图 38.

$$[0 \leq \alpha \leq l; q_0(0) = q_0(l), p_0(0) = p_0(l)]$$

表示相平面上闭回路  $D_0$  的方程 (图 38)。在时刻  $t = t_0$  位于回路  $D_0$  上的点, 在任意的另一时刻  $t$  将组成回路  $D$ 。将 (8) 式中的  $q_0$  和  $p_0$  以其表达式 (9) 来代替, 我们便得到回路  $D$  的参数方程:

$$q = q(t, \alpha), \quad p = p(t, \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq l). \quad (10)$$

积分  $I'$  中的  $q$  和  $p$  用这些函数来代替之后, 我们就得到了作为参数  $t$  的函数  $I'$ 。从  $I'$  的不变性可知  $\frac{dI'}{dt} = 0$ 。在积分号下取微分, 并作分部积分<sup>①</sup>, 便得到

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dI'}{dt} = \oint \frac{dA}{dt} \delta q + \frac{dB}{dt} \delta p + A \frac{d}{dt} \delta q + B \frac{d}{dt} \delta p = \\ &= \oint \frac{dA}{dt} \delta q + \frac{dB}{dt} \delta p + A \delta \frac{dq}{dt} + B \delta \frac{dp}{dt} = \\ &= \oint \frac{dA}{dt} \delta q - \delta A \frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt} \delta p - \delta B \frac{dp}{dt} = \\ &= \oint \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} \right) \frac{dp}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} \right] \delta q + \end{aligned}$$

① 见第 98 页的脚注①。在运算过程中, 先使  $\delta A = \frac{\partial A}{\partial q} \delta q + \frac{\partial A}{\partial p} \delta p$ ,  $\delta B = \frac{\partial B}{\partial q} \delta q + \frac{\partial B}{\partial p} \delta p$ , 而后再利用方程 (7)。

$$+ \left[ \left( \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial p} \right) \frac{dq}{dt} + \frac{\partial B}{\partial t} \right] \delta p =$$

$$= \oint \left( -Z \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \delta q + \left( -Z \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \delta p,$$

其中

$$Z = \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}.$$

在看作参数的变量  $t$  取任何值的情况下, 在任意的积分迴路上, 上面的积分总是等于零的。因此, 积分号下的表达式应当是变量  $q$  和  $p$  的全微分。因而有

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( -Z \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left( -Z \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial t} \right).$$

上式稍經变换即可写作

$$-\frac{\partial Z}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0.$$

由于函数  $H$  可以完全任意地选取, 所以

$$\frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{\partial Z}{\partial t} = 0,$$

即

$$Z = \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} = \text{const} = c.$$

于是, 我們有

$$\frac{\partial(A - cp)}{\partial p} = \frac{\partial B}{\partial q},$$

因之, 必定有这样的函数  $\Phi(t, q, p)$  存在, 使得<sup>①</sup>

$$(A - cp) \delta q + B \delta p = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \delta p = \delta \Phi.$$

这样, 我們便有

$$A \delta q + B \delta p = cp \delta q + \delta \Phi,$$

因而,

① 这里的  $t$  看作参数。

$$I' = \oint A\delta q + B\delta p = c \oint p\delta q = cI_1,$$

证毕。

当  $n > 1$  时, 虽然证明本身变得比较复杂, 但证明的思路仍然是这样。

### § 23. 相空间的体积不变性 · 刘维定理

我们来讨论“完全”绝对积分不变量

$$J = \int \cdots \int \delta p_1 \delta q_1 \cdots \delta p_n \delta q_n. \quad (1)$$

这个积分的不变性表示出  $2n$  维相空间中相体积的不变性; 它可以按如下方式来建立。

将积分哈密顿方程所得到的有限运动方程写成

$$q_i = q_i(t, q_k^0, p_k^0), p_i = p_i(t, q_k^0, p_k^0) \quad (i = 1, \cdots, n) \quad (2)$$

的形式, 其中  $q_k^0, p_k^0$  是当  $t = t_0$  时  $q_k, p_k$  的初值 ( $k = 1, \cdots, n$ )。

根据公式(2), 由  $t = t_0$  的初始状态所组成的任意体积  $J_0$ , 于时刻  $t$  将转变为由相应状态所组成的体积  $J$ 。同时,

$$J = \underbrace{\int \cdots \int}_{J_0} \left| \frac{\partial(q_1, p_1, \cdots, q_n, p_n)}{\partial(q_1^0, p_1^0, \cdots, q_n^0, p_n^0)} \right| \delta q_1^0 \delta p_1^0 \cdots \delta q_n^0 \delta p_n^0. \quad (3)$$

无损于一般性, 可以认为(3)式积分号下的雅科毕式是正的, 因之, 绝对值符号可以省去<sup>①</sup>。

于是, 在积分号下对  $t$  求微分之后, 我们便得到:

$$\left( \frac{dJ}{dt} \right)_{t=t_0} = \underbrace{\int \cdots \int}_{J_0} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial(q_1, p_1, \cdots, q_n, p_n)}{\partial(q_1^0, p_1^0, \cdots, q_n^0, p_n^0)} \right]_{t=t_0} \delta q_1^0 \delta p_1^0 \cdots \delta q_n^0 \delta p_n^0.$$

① 当  $t = t_0$  时这个雅科毕式等于 1, 这是因为在这个  $t$  值, 全体  $q_k = q_k^0$ , 全体  $p_k = p_k^0$ 。当  $t$  变化时, 雅科毕式连续地变化, 但不会变为零。因为能够使这个雅科毕式变为零的奇点不在讨论之列, 即假定在所讨论的体积里没有这样的奇点。

但是,

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial(q_1^0, p_1^0, \dots, q_n^0, p_n^0)} \right]_{t=t_0} = \\
 & = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial(q_1, p_1, \dots, \dot{q}_i, p_i, \dots, q_n, p_n)}{\partial(q_1^0, \dots, p_n^0)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial(q_1, p_1, \dots, q_i, \dot{p}_i, \dots, q_n, p_n)}{\partial(q_1^0, \dots, p_n^0)} \right]_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i^0} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i^0} \right]_{t=t_0} = \\
 & = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial q_i^0} \frac{\partial H(t_0, q_k^0, p_k^0)}{\partial p_i^0} - \frac{\partial}{\partial p_i^0} \frac{\partial H(t_0, q_k^0, p_k^0)}{\partial q_i^0} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

因此,  $\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0} = 0$ 。又因为初始时刻  $t_0$  可以完全任意地选取, 所以

以对任何  $t$  恒有:

$$\frac{dJ}{dt} = 0, \quad (4)$$

即当相体积  $J$  中的一切点, 由时刻  $t_0$  所具有的状态进入任意的另一时刻  $t$  所具有的状态时, 这个体积的大小是不变的。

由相体积的不变性可以导出統計力学的一个基本定理——刘維定理。

設想有大量的完全相同的系統“样本”。它們之間仅有初始状态  $q_i^0, p_i^0$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的差异。这些“样本”的全体組成統計系綜 (見王竹溪著“統計物理学导論”, 第一章第七节——譯者注)。

在給定体积內, 气体分子的总合就是統計系綜的一个例子。

对于相空間的每个元体积  $dV$ , 都可以給定一个“质量”  $d\mu$ , 以表示占有此元体积  $dV$  的“样本”数量。根据前面所证明的相空間的体积不变性,  $dV$  的大小将不随時間改变。按  $d\mu$  的物理意义, 占有体积  $dV$  的样本, 在任何时刻都将随此体积一同移动, 故其大小也不变。因此, 在运动中, 統計系綜的密度

$$\rho(t, q_i, p_i) = \frac{d\mu}{dV} \quad (5)$$

保持不变, 即

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (6)$$

将(6)式展开, 可以写成如下形式(见 § 15):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho H) = 0, \quad (6')$$

其中  $(\rho H)$  是泊松括弧。根据等式(6), 函数  $\rho(t, q_i, p_i)$  乃是运动积分。

这样, 我们便证明了如下的定理:

**刘维定理.** 统计系综的密度永远是运动积分。

例如, 对于保守系统, 依赖于系统能量的任何函数都可以作为统计系综的密度。

---



## 第四章 正則變換和哈密頓-雅科畢方程

### § 24. 正則變換

在  $2n$  維相空間中, 如果坐標變換(在一般情況下, 還包含時間變量  $t$  作為參數)

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(t, q_k, p_k), \\ \tilde{p}_i &= \tilde{p}_i(t, q_k, p_k) \\ \left( i=1, \dots, n; \frac{\partial(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)} \neq 0 \right) \end{aligned} \quad (1)$$

將任何哈密頓方程組

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

仍然變成哈密頓方程組(一般說來, 具有另一哈密頓函數  $\tilde{H}$ ):

$$\frac{d\tilde{q}_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \frac{d\tilde{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \quad (i=1, \dots, n), \quad (3)$$

則變換(1)稱為正則變換。

研究正則變換的重要性在於: 這種變換有可能將給定的哈密頓方程組(2)轉換為另一哈密頓方程組(3), 而組(3)中的函數  $\tilde{H}$  比組(2)的  $H$  有較為簡單的結構。

在相空間中, 如果依次完成兩個正則變換, 則其合成變換仍是正則變換。此外, 正則變換的逆變換以及恒等變換  $\tilde{q}_i = q_i, \tilde{p}_i = p_i (i=1, \dots, n)$  都是正則變換。因此, 全體正則變換構成一個群。

**例題** 1. 不難驗證, 變換

$$\tilde{q}_i = \alpha q_i, \quad \tilde{p}_i = \beta p_i \quad (i=1, \dots, n; \alpha \neq 0, \beta \neq 0)$$

是正則的, 它將方程組(2)變為具有

$$\tilde{H} = \alpha\beta H$$

的方程组(3)。

## 2. 变换

$$\tilde{q}_i = \alpha p_i, \quad \tilde{p}_i = \beta q_i \quad (i = 1, \dots, n; \alpha \neq 0, \beta \neq 0)$$

是正则的。在此情形下,

$$\tilde{H} = -\alpha\beta H.$$

## 3. 变换

$$\tilde{q}_i = p_i \operatorname{tg} t, \quad \tilde{p}_i = q_i \operatorname{ctg} t \quad (i = 1, \dots, n)$$

是正则的。其实, 不难验证, 当取

$$\tilde{H} = -H + \frac{1}{\sin t \cos t} \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \tilde{p}_i$$

时, 总可以由方程组(2)得到方程组(3)。

为了导出变换(1)的正则性条件, 我们来考察在正则变换(1)

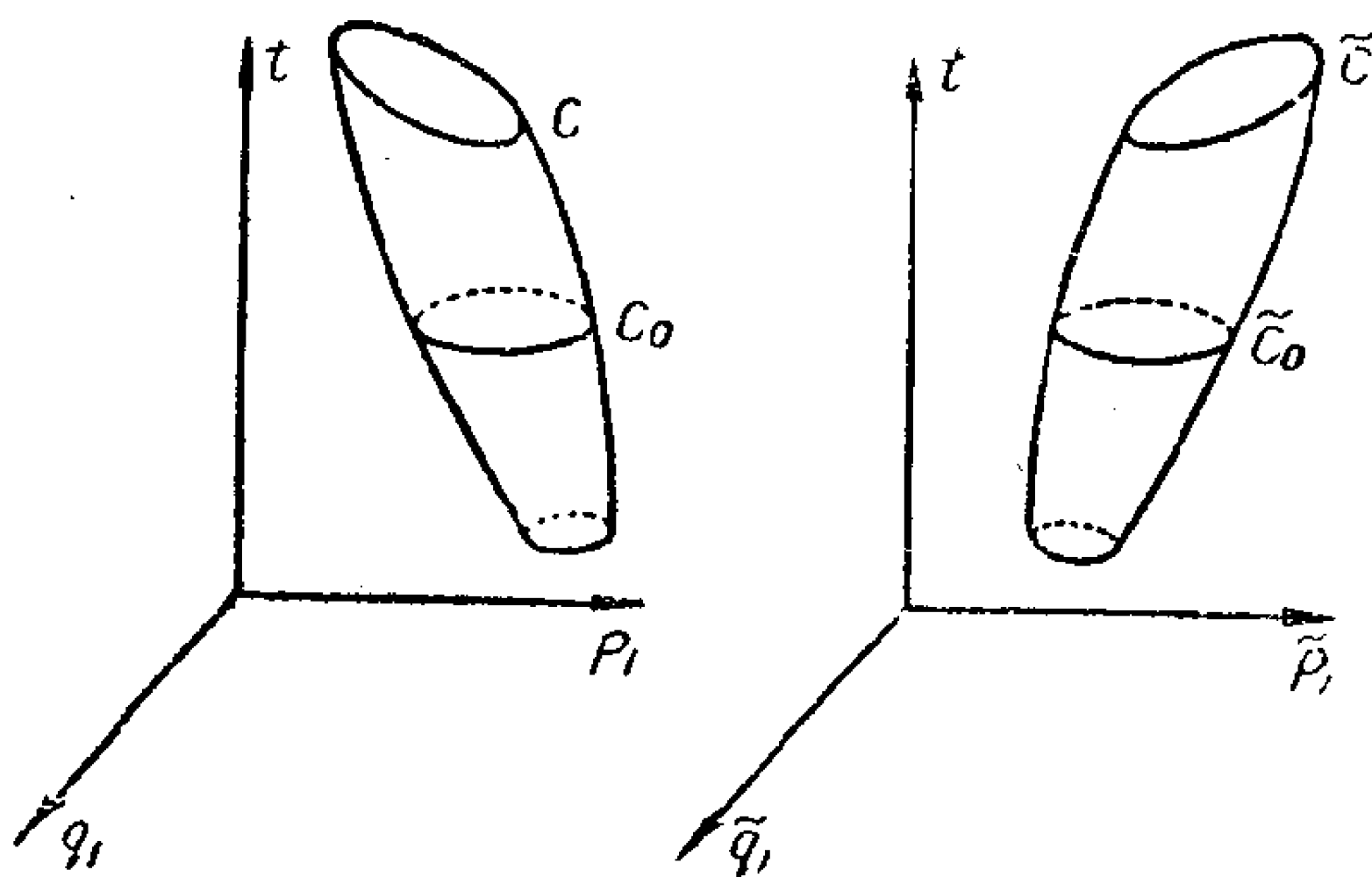


图 39.

之下, 相互转换的两个  $2n+1$  维增广相空间  $(q_i, p_i, t)$  和  $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t)$ , 以及哈密顿方程组(2)和(3)的两个相互对应的正路管 (图 39)。

环绕这两个正路

管任取两条在变换

(1)之下相互对应的闭合回路  $C$  和  $\tilde{C}$ 。另外, 再以同一超平面  $t = \text{const}$  截此二管, 则在截面上得到二“平面”回路  $C_0$  和  $\tilde{C}_0$ 。显然, 这两条回路在正则变换(1)之下也是相互转换的 (因为在正则变换中  $t$  保持不变)。由庞伽雷-卡当积分不变性可以断定:

$$\oint_C \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t = \oint_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \delta t \quad (4)$$

$$\oint_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \delta t = \oint_{\tilde{C}_0} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i. \quad (5)$$

从另一方面看, 如果将通用积分不变量  $\oint_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i$  中的变量用正則變換(1)轉換为变量  $q_i, p_i (i=1, \dots, n)$ , 則这个积分便轉換为  $2n$  維相空間  $(q_i, p_i)$  的某一个一阶通用积分不变量; 按李华中定理, 这个积分不变量和  $\oint_C \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i$  应当仅差一常数因子  $c$ 。因此,

$$\oint_{\tilde{C}_0} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i = c \oint_{C_0} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i. \quad (6)$$

由等式(4)–(6)得:

$$\oint_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \delta t = c \oint_C \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t. \quad (7)$$

如果认为第一个积分中的变量  $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{p}_n$  已經以变量  $q_1, \dots, p_n$  表出(同时, 积分迴路  $\tilde{C}$  已被換成积分迴路  $C$ ), 則等式(7)便可以改写成:

$$\oint_C \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \delta t - c \left[ \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right] = 0. \quad (8)$$

但是迴路  $C$  在  $2n+1$  維增广相空間中是完全任意的。因此, (8)式积分号下的表达式应当是关于  $2n+1$  个宗量  $q_1, p_1, \dots, q_n, p_n$  和  $t$  的某一函数的全微分。为方便計, 我們以  $-F(t, q_i, p_i)$  表示这个函数。于是, 便有<sup>①</sup>:

---

① 这里,  $\delta F = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \delta t$ .

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \delta t = c \left( \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right) - \delta F. \quad (9)$$

应当注意, 恒等式(9)中的常数  $c$  是永远不等于零的( $c \neq 0$ ),

因为表达式  $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \delta t$  不是全微分<sup>①</sup>, 它不可能和  $-\delta F$  相等。

函数  $F$  称为正则变换(1)的母函数, 常数  $c$  称为它的价。如果  $c=1$ , 则这种正则变换称为单价正则变换。

变换(1)为正则变换的必要充分条件是: 存在母函数  $F$  和某一常数  $c$ , 由于变换(1)使等式(9)恒被满足。

注. 如果变换(1)是正则的, 则存在母函数  $F$  和价  $c \neq 0$ , 使得对于任何函数  $H$  和与之对应的  $\tilde{H}$  之间有等式(9)成立。然而, 如果等式(9)对于某一对函数  $H$  和  $\tilde{H}$  成立, 则变换(1)也必是正则的<sup>②</sup>。

事实上, 如果在  $H$  之外, 另取一任意函数  $H_1$ , 并按如下条件来确定  $\tilde{H}_1$ :

$$\tilde{H}_1 - \tilde{H} = c(H_1 - H),$$

则当以  $\delta t$  乘上式两端并与等式(9)相减时, 我们便得到

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H}_1 \delta t = c \left( \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H_1 \delta t \right) - \delta F.$$

因此, 等式(9)对于任何函数  $H_1$  和与之对应的  $\tilde{H}_1$  也是正确的。

① 对于独立变量  $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t$  不是全微分, 因而对于独立变量  $q_i, p_i, t$  ( $i=1, \dots, n$ ) 也不是全微分。

② 但是不能因此就认为正则变换可以定义为: 将一个给定的哈密顿方程组变换为另一个哈密顿方程组的变换。

这是因为, 例如, 任何非正则变换  $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_k, p_k), \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q_k, p_k)$  ( $i=1, \dots, n$ ) 都能将  $H \equiv 0$  的哈密顿方程组变换为  $\tilde{H} \equiv 0$  的哈密顿方程组。

正则变换有时也称为接触变换。

在文献中,常常只讨论单价正则变换。许多作者错误地认为,所有将哈密顿方程组变换为哈密顿方程组的变换(1)仅只是单价的正则变换。这些作者没有注意到任意正则变换的一般形式中应当有任意常因子  $c$ 。

## § 25. 自由正则变换

我们现在来比较仔细地研究一下所谓自由正则变换。这种变换由补充不等式

$$\frac{\partial(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \neq 0 \quad (1)$$

所规定,它保证了量  $t, q_1, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$  的独立性。这些量现在可以取作基本变量<sup>①</sup>。事实上,根据不等式(1)就可以由 § 24 (1) 式的前  $n$  个方程将广义冲量  $p_1, \dots, p_n$  通过  $2n+1$  个量  $t, q_i, \tilde{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 来表示,因而,依赖于变量  $t, q_i, p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的任何函数都可以写成变量  $t, q_i, \tilde{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的函数形式。现在我们可以认为母函数已被写成这些变量的函数形式  $S$ :

$$F(t, q_i, p_i) = S(t, q_i, \tilde{q}_i).$$

于是,上节的基本恒等式(9)便可写成

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \delta t = c \left( \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right) + \delta S(t, q_i, \tilde{q}_i). \quad (2)$$

使上式左右两端中  $\delta q_i, \delta \tilde{q}_i$  和  $\delta t$  的系数相等,我们便得到以下公式:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \quad (i=1, \dots, n), \quad (3)$$

$$\tilde{H} = c H + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (4)$$

① 在非自由正则变换的情况下,量  $t, q_i, \tilde{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 之间有着一定的关系。

方程(3)决定了所讨论的正则变换。我们来证明它可以化为 § 24 变换(1)的形式。

(3)式前  $n$  个方程左端的偏导数  $\frac{\partial S}{\partial q_i}$  ( $i=1, \dots, n$ ) 作为变量  $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$  的函数是独立的, 因为根据公式(3), 相关关系<sup>①</sup>

$$\Omega\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = 0$$

可以写成等式

$$\Omega(cp_1, \dots, cp_n, q_1, \dots, q_n) = 0,$$

但由相空间中点的坐标  $q_i, p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的独立性可知这只有当  $\Omega \equiv 0$  时才是可能的。由作为变量  $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$  的函数的偏导数  $\frac{\partial S}{\partial q_i}$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的独立性可以断定这些函数的雅科毕式不恒等于零。因此, 对于自由正则变换的母函数  $S$ , 如下的行列式应异于零:

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k}\right)_{i,k=1}^n \neq 0. \quad (5)$$

由不等式(5)可知, 从(3)式的前  $n$  个方程可以将  $\tilde{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 解出来, 因此, 所有新的相变量  $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 可以通过老的变量  $q_i, p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 表示。同样, 按不等式(5), 由(3)式的后  $n$  个等式又可将  $q_i$  解出来, 因而所有的  $q_i, p_i$  亦可通过  $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 表出, 这表明如此所得到的形式如 § 24 (1)的变换是可逆的, 即对于这样的变换有  $\frac{\partial(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, \dots, p_n)} \neq 0$ 。因此, 方程(3)定义了一个具有给定母函数  $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$  和价  $c \neq 0$  的自由正则变换。公式(4)给出哈密顿函数  $H$  和  $\tilde{H}$  之间的简单关系。

选取满足条件(5)的不同母函数  $S$  和不同的价  $c \neq 0$ , 我们就

① 在这个关系式中, 量  $q_1, \dots, q_n$  被看作参数。

可以借公式(3)得到所有的自由正则变换<sup>①</sup>。

对于单价的( $c=1$ )自由正则变换, 公式(3)和(4)有更为简单的形式:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \quad (i=1, \dots, n), \quad (6)$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (7)$$

(7)式表明当以同一个自由单价正则变换用于不同的哈密顿方程组时, 在所有情况下,  $\tilde{H}$  和  $H$  之差都是相同的(等于  $\frac{\partial S}{\partial t}$ )。

由等式(4)可知, 当而且仅仅当  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$  (母函数  $S$  不显含  $t$ ) 时  $\tilde{H} = cH$ 。在这种情况下, 由等式(3)可知时间  $t$  将不显含于正则变换的公式中。在这样的正则变换下, 函数  $H$  除了被常数  $c$  乘而外并无实质性的改变。因此, 如果我们希望得到具有真正比较简单的哈密顿函数的新方程组, 就必须取包含时间  $t$  作为参数的自由正则变换。

**例题** 1. 在第 123—124 頁上曾讨论过的三个正则变换:

$$1) \quad \tilde{q}_i = \alpha q_i, \quad \tilde{p}_i = \beta p_i; \quad 2) \quad \tilde{q}_i = \alpha p_i, \quad \tilde{p}_i = \beta q_i$$

$$3) \quad \tilde{q}_i = p_i \operatorname{tg} t, \quad \tilde{p}_i = q_i \operatorname{ctg} t \quad (i=1, \dots, n),$$

其中 2) 和 3) 是自由的, 它们的母函数和价分别为  $S = -\beta \sum_{i=1}^n q_i \tilde{q}_i$ ,  $c = -\alpha\beta$ ;

$S = -\operatorname{ctg} t \sum_{i=1}^n q_i \tilde{q}_i$ ,  $c = -1$ 。变换 1) 不是自由的。对于这个变换  $c = \alpha\beta$ ,

$F \equiv 0$ 。

2. 我们来看相平面( $q, p$ ) (这里  $n=1$ ) 上的任一仿射变换:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q} &= \alpha q + \beta p, \\ \tilde{p} &= \alpha_1 q + \beta_1 p \quad (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

① 关于非自由的正则变换也有类似于(3)的公式。这些公式将在 § 29 中来建立。

将(8)式代入第126页上的基本恒等式(9)。由于(8)式右端不包含变量  $t$ ，所以要找的函数  $F$  也不显含时间  $t$ ： $F = F(q, p)$ 。因之，基本恒等式具有如下形式：

$$(\alpha_1 q + \beta_1 p)(\alpha \delta q + \beta \delta p) - c p \delta q = -\delta F,$$

或

$$\delta\left(\frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2 + \frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2\right) + \alpha_1\beta q \delta p + (\alpha\beta_1 - c)p \delta q = -\delta F.$$

在条件

$$c = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$$

之下，上式左端是全微分。因此，变换(8)是  $c$  价的正则变换， $c$  等于变换的行列式，且母函数

$$F = \frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2 + \frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2 + \alpha_1\beta qp.$$

当  $\beta \neq 0$  时这个变换是自由的。

3. 变换  $\tilde{q} = \sqrt{q} \cos 2p$ ,  $\tilde{p} = \sqrt{q} \sin 2p$  是单价自由正则变换，它的母函数

$$S = \frac{1}{2}q \arccos \frac{\tilde{q}}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2}\tilde{q}\sqrt{q - \tilde{q}^2}.$$

对于自然系统，坐标  $q_1, \dots, q_n$  决定系统的位置，而坐标和广义冲量  $p_1, \dots, p_n$  一起便决定了系统的状态，即系统各点的位置和速度。在一般形式的正则变换之下，坐标的这一特征便消失了。量  $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$  已经不再能够确定系统的位置，而只能和  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n$  一起确定系统的状态。只有在点正则变换的特殊情形，变量  $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$  才能依归决定系统的位置，在这种变换中，函数  $\tilde{q}_i(t, q_k, p_k)$  实际上不包含冲量：

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t, q_k) \quad (i = 1, \dots, n).$$

我们应当注意，今后欲将任何哈密顿方程组变换为函数  $H$  有简单结构的方程组时可借自由正则变换来实现。然而，自由正则变换并非点正则变换。因此，非点正则变换在哈密顿方程组的理论中起着重要作用。



## § 26. 哈密頓-雅科毕方程

正則變換的理論把我們直接引向哈密頓-雅科毕方程。

設給定一完整系統，它的運動決定于哈密頓正則方程組：

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (1)$$

我們來設法建立一個自由正則變換，使得在變換後的哈密頓方程組

$$\frac{d\tilde{q}_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \frac{d\tilde{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

中，函數  $\tilde{H}$  恒等於零：

$$\tilde{H} = 0. \quad (3)$$

於是組(2)便可以直接進行積分；積分之即得

$$\tilde{q}_i = \alpha_i, \quad \tilde{p}_i = \beta_i, \quad (4)$$

其中  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  是  $2n$  個任意常數。知道了正則變換[即  $q_i, p_i (i=1, \dots, n)$  和  $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i (i=1, \dots, n)$  之間的关系]之後，我們就可以將所有的  $q_i$  和  $p_i$  表示成時間  $t$  和  $2n$  個任意常數  $\alpha_k, \beta_k (k=1, \dots, n)$  的函數，即完全求出了所給完整系統有限形式的運動方程[組(1)的全体解]。

怎樣來確定我們所需要的正則變換呢？為此按前一節的公式(7)，必須而且只須所求正則變換的母函數  $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$  滿足等式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_i, p_i) = 0. \quad (5)$$

上式與同節中的公式(6)相結合便給出

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0. \quad (6)$$

偏微分方程(6)稱為哈密頓-雅科毕方程。因此，具有基本變量  $t$  和  $q_i$  (這裡  $\tilde{q}_i$  被看做參數) 的母函數  $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$  滿足哈密頓-雅科毕偏微分方程。同時，除哈密頓-雅科毕方程而外，母函數  $S(t,$

$q_i, \tilde{q}_i$ )还应当满足条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k}\right)_{i,k=1}^n \neq 0. \quad (7)$$

母函数  $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$  一经找到, 公式

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \quad (i=1, \dots, n)$$

便决定了所要求的自由正则变换。在这些公式中将  $\tilde{q}_i$  换成  $\alpha_i$ 、 $\tilde{p}_i$  换成  $\beta_i$ , 我们就得到了所给完整系统有限形式的运动方程。如果一开始就把  $S$  中的  $\tilde{q}_i$  换成  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), 则整个这个过程写起来将更为方便。

现在我们引入一个定义。包含  $n$  个任意常数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  的哈密顿-雅科毕偏微分方程的解  $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ , 当其满足条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i,k=1}^n \neq 0 \quad (8)$$

时, 称为该偏微分方程的全积分。

现在可以来表述我们已经证明了的定理。

**雅科毕定理** 如果  $S(t, q_i, \alpha_i)$  是哈密顿-雅科毕方程(6)的一个全积分, 则具有给定函数  $H$  的完整系统, 其有限形式的运动方程可以写成<sup>①</sup>

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (9)$$

的形式, 其中  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  是任意常数 ( $i=1, \dots, n$ )。

因此, 知道了偏微分方程(6)的全积分, 就可以避免对常微分方程组(1)进行积分。这个方程组的积分问题被与之等价的、求哈密顿-雅科毕偏微分方程全积分的问题所代替。

**注.** 偏微分方程的通解依赖于若干任意函数。因此, 哈密顿-

① 这里, 我们将任意常数  $-\beta_i$  就简单地写作  $\beta_i$ 。根据条件(8), 从(9)式的后  $n$  个方程可以将  $q_i$  解出来, 并将  $q_1, \dots, q_n$  表成  $t$  和  $2n$  个任意常数  $\alpha_i, \beta_i$  的函数。

雅科毕方程的全积分絕非通解。和通解相比，全积分只不过包括了为数不多的“一小部分”解。然而，根据全积分却可以得到原来的偏微分方程（“全积分”的名字即由此而来）。其实，将全积分微分之便得到

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = f_i(t, q_k, \alpha_k) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = f_0(t, q_k, \alpha_k). \quad (11)$$

如果全积分  $S(t, q_k, \alpha_k)$  是已知的，則函数  $f_i(t, q_k, \alpha_k)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 也是已知的。根据条件(8)：

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i, k=1}^n \neq 0, \quad (12)$$

由关系(10)便可以将每个  $\alpha_k$  通过偏导数  $\frac{\partial S}{\partial q_i}$  和  $t, q_i$  表示出来。将所得  $\alpha_k$  的表达式代入等式(11)我們便得到了原来的偏微分方程(6)①。

作为哈密頓-雅科毕方程全积分的一个例子，我們来看所謂的哈密頓主函数。为此，我們轉回头来看第95頁的公式(7)和图33。我們只討論当  $t_0(\alpha) = \text{const} = t_0$  时的特殊情况，即迴路  $C_0$  是由系統在  $t = t_0$  时的初始状态所組成。此外，将  $t_1, q_i^1, p_i^1, H_1$  就简单地写成  $t, q_i, p_i, H$ 。于是，如果以  $W$  表示沿正路（即沿正路管之母綫）从起始点 ( $t = t_0$ ) 到对应于給定  $t$  值的終点的作用量，則

$$\delta W = \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t - \sum_{i=1}^n p_i^0 \delta q_i^0. \quad (13)$$

如果利用有限形式的运动方程

① 因为在方程(6)中仅有  $S$  的偏导数，而不包含函数  $S$  本身，所以可以认为全积分还包含有第  $n+1$  个可加任意常数  $\alpha_{n+1}$ 。

$$q_i = \varphi_i(t, q_k^0, p_k^0), \quad (14)$$

$$p_i = \psi_i(t, q_k^0, p_k^0) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (15)$$

将作用量

$$W = \int_{t_0}^t L(t, q_i, \dot{q}_i) dt$$

中的  $q_i(t)$  以其表达式(14)来代替, 则  $W$  便成为  $t, q_i^0, p_i^0 (i = 1, \dots, n)$  的函数。哈密顿曾利用有限形式的运动方程(14)将  $p_k^0$  以  $t, q_i^0, q_i$  表出, 使作用量写成

$$W = W(t, q_i, q_i^0) \quad (16)$$

的形式。

写成形式(16)的作用量  $W$  (即表为初始坐标、终了坐标和终了时刻  $t$  的函数形式)被称之为哈密顿主函数。将等式(13)中的  $W$  看作哈密顿主函数, 由这个等式我们便得到:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial q_i^0} = -p_i^0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -H(t, q_i, p_i). \quad (18)$$

由等式(17)和(18)即可断定哈密顿主函数满足哈密顿-雅科毕方程:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = 0, \quad (19)$$

而关系式(17)乃是包含  $2n$  个任意常数  $q_i^0, p_i^0 (i = 1, \dots, n)$  的有限运动方程。

这样, 哈密顿就向我们指出了如何利用方程(19)的全积分得到有限形式运动方程的方法。但是, 哈密顿的这个全积分并不是任意的, 它所包含的任意常数必须是初值  $q_i^0$  和  $p_i^0$ 。这就兜起圈子来了: 为了写出有限形式运动方程(17), 需要知道哈密顿主函数, 而要得到这个主函数, 如前所述, 又需要有限形式的运动

方程。

雅科毕的功績就在于他繼續了哈密頓的研究，打开了这一困难局面。他指出，有限形式运动方程可借哈密頓方程的任何全积分  $S(t, q_i, \alpha_i)$  写成如(9)的形式。

我們現在轉回头来看恒等式(13)，并将它和第127頁上的恒等式(2)进行比較。从比較中可以看出，公式(14)和(15)这組将哈密頓坐标(系統在时刻  $t$  的状态)以初始坐标  $q_1^0, \dots, p_n^0$  表出的有限运动方程可以看作由变量  $q_i^0, p_i^0 (i=1, \dots, n)$  到变量  $q_k, p_k (k=1, \dots, n)$  的自由单价正則变换；这个正則变换的母函数是  $-W$ ，其中  $W$  是哈密頓主函数<sup>①</sup>。

因此，借任一哈密頓方程組的运动所实现的相空間变换是正則的(同时还是自由单价的)。

**例題.** 建立自由质点作慣性运动时的哈密頓主函数。在这种情况下(假定  $t_0=0$ )

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad y = y_0 + \dot{y}_0 t, \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t,$$

因而

$$\begin{aligned} W &= \frac{m}{2} \int_0^t (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt = \\ &= \frac{mt}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) = \frac{m}{2t} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]. \end{aligned}$$

如果由所得的哈密頓主函数

$$W = \frac{m}{2t} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2].$$

出发，則根据公式(17)即可得到运动方程，它在本例中具有如下形式：

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = m \frac{x - x_0}{t}; & -p_x^0 &= \frac{\partial W}{\partial x_0} = -m \frac{x - x_0}{t}, \\ p_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = m \frac{y - y_0}{t}; & -p_y^0 &= \frac{\partial W}{\partial y_0} = -m \frac{y - y_0}{t}, \\ p_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = m \frac{z - z_0}{t}; & -p_z^0 &= \frac{\partial W}{\partial z_0} = -m \frac{z - z_0}{t}. \end{aligned}$$

① 由变量  $q_i, p_i$  到变量  $q_i^0, p_i^0$  的逆正則变换的母函数則是哈密頓主函数  $W$ 。

假若我們討論的是广义保守系統 $\left(\frac{\partial H}{\partial t}=0\right)$ , 則哈密頓-雅科毕方程便具有

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0 \quad (20)$$

的形式, 且其全积分可以写成

$$S = -ht + V(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h) \quad (21)$$

的形式, 式中  $h$  和  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  都是任意常数。

将  $S$  的这个表达式代入方程(20), 我們便得到决定函数  $V$  的如下方程:

$$H\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = h. \quad (22)$$

求出这个方程的全积分, 即滿足不等式

$$\det\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i,k=1}^n \neq 0 \quad (\alpha_n \equiv h) \quad (23)$$

的解  $V(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h)$ , 我們便可以利用公式(9)和(21)得到广义保守系統的有限运动方程如下:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \quad (i=1, \dots, n), \quad (24')$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad (j=1, \dots, n-1), \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \gamma, \quad (24'')$$

其中  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j=1, \dots, n-1$ ),  $h$  和  $\gamma$  都是任意常数。

根据条件(23), 坐标  $q_1, \dots, q_n$  可由方程(24'')解出, 并写成  $t$  和  $2n$  个任意常数  $\alpha_j, \beta_j, h$  和  $\gamma$  的函数。将所得表达式代入方程(24'), 我們便得到关于广义冲量  $p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的类似表达式<sup>①</sup>。

在广义保守系統的情况下, 我們以独立变量少一个的方程

---

① 由(24'')式的前  $n-1$  个方程, 可以将  $n-1$  个坐标通过余下的第  $n$  个坐标和  $2n-1$  个任意常数表出。这样, 我們便得到坐标空間中的軌道方程, 而(24'')式最后一个方程便給出坐标和时间变量  $t$  之間的关系。

(20)代替了方程(6)。与此相仿,若坐标之一是循环的,则偏微分方程的独立变量也将少一个。

我們現在来看当有若干个坐标  $q_{m+1}, \dots, q_n$  是循环坐标时的一般情形。此时  $H = H(t, q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_n)$ , 而且哈密頓-雅科毕方程的全积分可以写成

$$S = \sum_{\mu=m+1}^n \alpha_{\mu} q_{\mu} + S_0(t, q_1, \dots, q_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (25)$$

的形式。

对于函数  $S_0$  則有:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n\right) = 0. \quad (26)$$

如果,  $q_{m+1}, \dots, q_n$  是广义保守系統的循环坐标, 則函数  $S$  便可以取如下形式\*:

$$S = -ht + \sum_{\mu=m+1}^n \alpha_{\mu} q_{\mu} + V_0(q_1, \dots, q_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n, h), \quad (27)$$

其中函数  $V_0$  由方程

$$H\left(q_1, \dots, q_m, \frac{\partial V_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n\right) = h \quad (28)$$

来确定。

## § 27. 分离变量法 · 例题

我們在前面已經指出, 正則方程組的积分可归結为求哈密頓-雅科毕方程的全积分。这一論断不仅有其理論上的价值。看来許多动力学問題, 包括理論物理学上的一些有趣問題都将据此得到自己方便的实用解。

---

\*  $V_0$  中的  $\alpha_m$  是可加任意常数。——譯者注

現在我們來向讀者介紹求哈密頓-雅科毕方程全积分的分离变量法。这个方法适用于当广义保守系統的哈密頓函数 $H$ 具有特殊結構时的情况。

1°. 假設

$$H = G[f_1(q_1, p_1), \dots, f_n(q_n, p_n)]. \quad (1)$$

此时, 在函数 $H$ 的表达式中, 变量已被分离: 每个函数 $f_i$ 只包含一对共轭变量 $q_i, p_i$ 。

上节中的方程(22)現在可以写成

$$G\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), \dots, f_n\left(q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)\right] = h. \quad (2)$$

令

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3)$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是任意常数。于是, 按公式(1), 常数 $h$ 可以通过常数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 表示成如下形式:

$$h = G(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (4)$$

由等式(3)解出 $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ , 得①:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i(q_i, \alpha_i) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$V = \sum_{i=1}^n \int F_i(q_i, \alpha_i) dq_i \quad (5)$$

$$S = -G(\alpha_1, \dots, \alpha_n)t + \sum_{i=1}^n \int F_i(q_i, \alpha_i) dq_i. \quad (6)$$

在此情形,

---

① 我們假定每个函数 $f_i(q_i, p_i)$ 实质上都包含相应的冲量 $p_i$ , 即 $\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0$ 。因此由方程(3)可以解出 $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$ 来; 每个函数 $F_i$ 都是两个变量 $q_i$ 和 $\alpha_i$ 的函数;  $i = 1, \dots, n$ 。



$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i} = \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} = 0 \text{ 当 } i \neq k \text{ 时}$$

$$(i, k = 1, \dots, n),$$

同时基本条件

$$\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right)_{i,k=1}^n \neq 0 \quad (7)$$

归结为不等式

$$\prod_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} \neq 0.$$

又由于关系式

$$f_i(q_i, p_i) = \alpha_i \quad (8)$$

和方程

$$p_i = F_i(q_i, \alpha_i) \quad (9)$$

等价, 故

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial p_i} \right)^{-1} \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (10)$$

而且条件(7)永远被满足。因此, 公式(6)给出了哈密顿-雅科毕方程的全积分。

有限运动方程

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (11)$$

在所给情况下可以写成如下形式①:

---

① 我们将公式(5)和(6)中的积分  $\int F_i(q_i, \alpha_i) dq_i$  理解为积分  $\int_{\gamma_i}^{q_i} F_i(q_i, \alpha_i) dq_i$ , 其中常数  $\gamma_i$  固定不变, 而且和任意常数  $\alpha_k$  无关。于是,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{k=1}^n \int F_k(q_k, \alpha_k) dq_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int F_i(q_i, \alpha_i) dq_i = \int \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} dq_i.$$

然后再利用关系式(10)。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial \alpha_i} t + \int \frac{dq_i}{\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)_{p_i=F_i(q_i, \alpha_i)}} &= \beta_i \quad (i=1, \dots, n), \\ p_i &= F_i(q_i, \alpha_i). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

因此, 借求積法便可以得到有限運動方程。

例 1. 我們來看一自由度振子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}.$$

令  $G(\alpha) \equiv \alpha$ ,  $f(p, q) \equiv \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2} = \alpha$ , 則得:

$$p = F(q, \alpha) \equiv \sqrt{2m\alpha - mcq^2}. \quad (13)$$

因此, 運動方程[見(12)]具有如下形式:

$$-t + \frac{1}{\omega} \int \frac{dq}{\sqrt{A^2 - q^2}} = \beta, \quad (14)$$

其中

$$A^2 = \frac{2\alpha}{c}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

注意到(14)式中的積分等於  $\arcsin \frac{q}{A}$ , 我們便得到如下形式的運動方程:

$$q = A \sin \omega(t + \beta). \quad (15)$$

2°. 若

$$H = g_n \{ \dots g_3 \{ g_2 [ g_1 (q_1, p_1), q_2, p_2 ], q_3, p_3 \} \dots q_n, p_n \} \quad (16)$$

則決定  $V$  的方程便可以寫成

$$g_n \left\{ \dots g_3 \left\{ g_2 \left[ g_1 \left( q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1} \right), q_2, \frac{\partial V}{\partial q_2} \right], q_3, \frac{\partial V}{\partial q_3} \right\} \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right\} = h.$$

現在引入任意常數  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  和  $\alpha_n = h$ , 並依次令

$$\left. \begin{aligned} g_1 \left( q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) &= \alpha_1, \\ g_2 \left( \alpha_1, q_2, \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) &= \alpha_2, \\ &\dots \dots \dots \\ g_n \left( \alpha_{n-1}, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right) &= \alpha_n. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由此解出各个偏导数<sup>①</sup>:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = G_1(q_1, \alpha_1),$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = G_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2),$$

.....

$$\frac{\partial V}{\partial q_n} = G_n(q_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

于是, 便有

$$V = \sum_{i=1}^n \int G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) dq_i \text{ ②}, \quad (18)$$

$$S = -\alpha_n t + \sum_{i=1}^n \int G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) dq_i. \quad (19)$$

这里,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i} = \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} = 0 \text{ 当 } i < k \text{ 时},$$

$$(i, k = 1, \dots, n).$$

因之, 条件(7)化为不等式

$$\prod_{i=1}^n \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} \neq 0.$$

这个不等式永远是成立的, 因为方程

$$g_i(\alpha_{i-1}, q_i, p_i) = \alpha_i \quad (20)$$

和方程

$$p_i = G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \quad (21)$$

① 我們假设  $\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0$ , 即函数  $g_i(q_i, p_i)$  中确实含  $p_i$ .

② 这里以及本节以后各处, 我們把不定积分都理解为具有变上限和与常数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  无关的不变下限的定积分(如 1° 中所注)。

等价,因而

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} = \left( \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \right)_{p_i=G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)}^{-1} \neq 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (22)$$

下面我们要用到的偏导数  $\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}}$ , 它的表达式可由方程(20)和(21)求得, 即

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}} = - \left( \frac{\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_{i-1}}}{\frac{\partial g_i}{\partial p_i}} \right)_{p_i=G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)}. \quad (23)$$

将表达式(19)代入有限运动方程(11), 并考虑到公式(22)和(23), 最后便得到:

$$\left. \begin{aligned} & \int \left( \frac{dq_i}{\left( \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \right)_{p_i=G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)}} \right) \\ & - \int \left( \frac{\frac{\partial g_{i+1}}{\partial \alpha_i}}{\frac{\partial g_{i+1}}{\partial p_{i+1}}} \right)_{p_{i+1}=G_{i+1}(q_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+1})} dq_{i+1} \\ & (i=1, \dots, n-1), \\ & - t + \int \left( \frac{dq_n}{\left( \frac{\partial g_n}{\partial p_n} \right)_{p_n=G_n(q_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n)}} \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & = \beta_i \\ & = \beta_n, \end{aligned} \quad (24)$$

$$p_i = G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \quad (i=1, \dots, n). \quad (25)$$

这里, (24)式的前  $n-1$  个方程是坐标空间中轨道族的方程; 这些方程包含  $2n-1$  个任意常数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ 。(24)式最后一个方程包含新的任意常数  $\beta_n$ , 它给出坐标  $q_n$  和时间变量  $t$  之间的关系。

将得自方程(24)的函数  $q_i(t, \alpha_k, \beta_k) (i=1, \dots, n)$  代入方程(25)之后, 冲量  $p_i (i=1, \dots, n)$  就被确定为  $t$  和所有任意常数  $\alpha_i, \beta_i (i=1, \dots, n)$  的函数。

例 2. 我们来讨论开普勒运动: 质量为  $m$  的质点在中心(吸引)力作用下的运动, 力的大小与质点到力心的距离平方成反比。

在这种情况下, 在球坐标中

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2), \quad \Pi = -\frac{\gamma}{r} (\gamma > 0),$$

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\psi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\gamma}{r}.$$

令

$g_1 \equiv p_\psi = \alpha_1$ ,  $g_2 \equiv p_\theta^2 + \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_2$ ,  $g_3 \equiv \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{\alpha_2}{r^2} \right) - \frac{\gamma}{r} = \alpha_3$ . 于是, 根据公式(24), 我们便得到:

$$\psi - \alpha_1 \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta}}} = \beta_1, \quad (26a)$$

$$\int \frac{d\theta}{2 \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta}}} - \int \frac{\frac{1}{r^2} dr}{2 \sqrt{2m\alpha_3 + \frac{2m\gamma}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}}} = \beta_2, \quad (26b)$$

$$-t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2m\alpha_3 + \frac{2m\gamma}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}}} = \beta_3. \quad (26c)$$

我们得到了开普勒运动的有限形式方程。

在研究这一运动时, 可以认为初始速度位于子午面  $\psi = \text{const}$  上而不失其一般性。于是, 在初始时刻  $\frac{d\psi}{d\theta} = 0$ , 因而, 根据公式(26a)有:

$$\alpha_1 = 0 \quad (27)$$

和  $\psi = \beta_1 = \text{const}$ , 即运动是平面的。将等式(26b)和(26c)逐项微分之, 我们便得到扇形速度①等于

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2m} = \text{const},$$

即质点在平面  $\psi = \text{const}$  上按面积定律运动。

最后, 为了确定轨道, 我们令  $\frac{1}{r} = x$ , 于是由公式(26b), 同时考虑到等式(27), 便得到:

① 即引自力心的矢径所扫过的面积对时间的导数。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c+2kx-x^2}} = \beta - \theta,$$

其中

$$c = \frac{2m\alpha_3}{\alpha_2}, k = \frac{m\gamma}{\alpha_2}, \beta = 2\sqrt{\alpha_2}\beta_2. \quad (28)$$

积分之后即得:

$$\arccos \frac{x-k}{\sqrt{k^2+c}} = \theta - \beta,$$

因之,

$$x = k + \sqrt{k^2+c} \cos(\theta - \beta).$$

最后, 根据  $x = \frac{1}{r}$  的关系可知轨道方程是圆锥截綫, 它的一个焦点位于力心上, 即:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \beta)}, \quad (29)$$

式中圆锥截綫的参数和偏心率由下列等式确定:

$$p = \frac{1}{k} = \frac{\alpha_2}{m\gamma}, e = \sqrt{1 + \frac{c}{k^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_2\alpha_3}{m\gamma^2}}. \quad (30)$$

假设质点轨道是封闭的(在太阳吸引下的行星运动), 则此轨道是椭圆, 力心(太阳)在它的一个焦点上。

以  $F$  和  $a, b (a > b)$  分别表示椭圆的面积和它的两个半轴之长, 则得 (因为  $p = \frac{b^2}{a}$ ):

$$\frac{F^2}{a^3} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{a^3} = \pi^2 p.$$

设  $\tau$  为周期(转一圈的时间), 则  $\tau = \frac{2mF}{\sqrt{\alpha_2}}$ 。于是, 根据等式(30),

$$\frac{1}{4} \frac{\tau^2}{a^3} = \frac{m^2 F^2}{\alpha_2 a^3} = \frac{\pi^2 m^2 p}{\alpha_2} = \frac{\pi^2 m}{\gamma} = \frac{\pi^2}{\gamma_1} \left( \gamma_1 = \frac{\gamma}{m} \right); \quad (31)$$

按牛顿引力定律, 式中的  $\gamma_1$  仅与吸引中心有关。于是我们得到了行星绕日运动的开普勒三定律: 1) 行星以不变的扇形速度沿平面轨道运动; 2) 这些轨道是椭圆, 太阳位于此椭圆的一个焦点上; 3) 运行一周的时间平方和轨道长半轴立方之比对于所有行星都是一样的。

3°. 作为应用分离变量法的另一个例子, 我们来看当

$$H = \frac{f_1(q_1, p_1) + \dots + f_n(q_n, p_n)}{g_1(q_1, p_1) + \dots + g_n(q_n, p_n)} \quad (32)$$

时的情形。此时,基本微分方程

$$H = \left( q_1, \dots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right) = h$$

可以写成如下形式:

$$\sum_{i=1}^n \left[ f_i \left( q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) - h g_i \left( q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \right] = 0. \quad (33)$$

我們令

$$f_i \left( q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) - h g_i \left( q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = \alpha_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (34)$$

其中  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  都是任意常数; 常数  $\alpha_n$ , 根据方程(33)和等式(34), 可以通过  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  来表示, 即

$$\alpha_n = -\alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1}. \quad (35)$$

由方程(34)解出偏导数  $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ , 得:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i(q_i, \alpha_i, h) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (36)$$

将方程(33)的解取作如下形式:

$$V = \sum_{i=1}^n \int F_i(q_i, \alpha_i, h) dq_i, \quad (37)$$

則哈密頓-雅科毕方程的全积分具有形式

$$S = -ht + \sum_{i=1}^n \int F_i(q_i, \alpha_i, h) dq_i. \quad (38)$$

于是, 有限运动方程(11)可用求积法得到:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{\partial F_j}{\partial \alpha_j} dq_j - \int \frac{\partial F_n}{\partial \alpha_n} dq_n &= \beta_j \quad (j = 1, \dots, n-1), \\ \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial F_i}{\partial h} dq_i &= t + \beta_n, \\ p_i &= F_i(q_i, \alpha_i, h) \quad (i = 1, \dots, n) \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n &= 0). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

假設方程  $f_i(q_i, p_i) - h g_i(q_i, p_i) = \alpha_i$  滿足可解性条件:  $\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0$ ,

于是由此方程便可以解出  $p_i$  来, 得:  $p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h) \quad (i = 1, \dots, n)$ 。此时, 隐函数  $F_i$  的导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} &= \left[ \frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \right]^{-1}_{p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h)}, \\ \frac{\partial F_i}{\partial h} &= \left\{ \left[ \frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \right]^{-1} g_i(q_i, p_i) \right\}_{p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h)} \\ &\quad (i = 1, \dots, n).\end{aligned}$$

方程(39)的最终形式为:

$$\left. \begin{aligned} &\int \left[ \frac{\partial f_j}{\partial p_j} - h \frac{\partial g_j}{\partial p_j} \right]^{-1}_{p_j = F_j(q_j, \alpha_j, h)} dq_j - \\ &\quad - \int \left[ \frac{\partial f_n}{\partial p_n} - h \frac{\partial g_n}{\partial p_n} \right]^{-1}_{p_n = F_n(q_n, \alpha_n, h)} dq_n = \beta_j \\ &\quad (j = 1, \dots, n-1), \\ &\sum_{i=1}^n \int \left\{ \left[ \frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \right]^{-1} g_i(q_i, p_i) \right\}_{p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h)} dq_i = t + \beta_n, \\ &p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h) \quad (i = 1, \dots, n) \\ &(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

作为特殊情况, 我们得到了刘维定理:

若系统的动能和势能有如下形式:

$$T = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n A_i \right) \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i^2, \quad \Pi = \frac{\sum_{i=1}^n \Pi_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (41)$$

其中  $A_i, B_i$  和  $\Pi_i$  只是  $q_i$  一个变量的函数 ( $i = 1, \dots, n$ ), 则有限运动方程可用求积法得到。

事实上, 对于刘维系统,

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i^2}{B_i} + 2\Pi_i \right)}{2 \sum_{i=1}^n A_i}, \quad (42)$$

而这不过是公式(32)的特殊情况罢了。

## § 28. 正则变换在摄动理论中的应用

设具有给定函数  $H$  的系统的运动为已知, 即微分方程组



$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

的解

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \varphi_i(t, q_k^0, p_k^0), \quad p_i = \psi_i(t, q_k^0, p_k^0) \\ [q_i^0 &= (q_i)_{t=0}, \quad p_i^0 = (p_i)_{t=0}; \quad i=1, \dots, n] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

是已知的，要求確定哈密頓函數為  $H + H_1$  的“受擾”系統的运动，即微分方程組

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial(H + H_1)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(H + H_1)}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

的解。若將(2)式中的  $q_k^0$  和  $p_k^0$  ( $k=1, \dots, n$ ) 看作新變量，則如第 134—135 頁上所述，公式(2)便確定一自由單價正則變換。這個變換將哈密頓方程組(1)變為  $\tilde{H} = 0$  的哈密頓方程組[見第 133 頁上的公式(13)]

$$\frac{dq_k^0}{dt} = 0, \quad \frac{dp_k^0}{dt} = 0 \quad (k=1, \dots, n), \quad (4)$$

而哈密頓方程組(3)則被變換為函數  $\tilde{H}$  等於  $H_1$  的哈密頓方程組<sup>①</sup>

$$\frac{dq_k^0}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_k^0}, \quad \frac{dp_k^0}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_k^0} \quad (k=1, \dots, n). \quad (5)$$

這樣，新變量  $q_k^0$  和  $p_k^0$  便具有一個絕妙的性質：對於未受擾運動，它們保持常值不變，而且就等於初始值；而對於受擾運動，它們則是時間和初始值的函數：

$$q_k^{[0]}(t, q_j^0, p_j^0), \quad p_k^{[0]}(t, q_j^0, p_j^0) \quad (k=1, \dots, n). \quad (6)$$

這些函數是作為哈密頓方程組(5)的通解被確定的，“擾動能量”  $H_1$  乃是這個方程組的哈密頓函數。如果在未受擾運動(2)的公式

① 這可由關係式  $\tilde{H} - (H + H_1) = 0 - H$  來斷定。這個等式左右兩端都等於  $\frac{\partial S}{\partial t}$ ， $S$  是所考察的自由單價正則變換的母函數(見第 129 頁)。

中以函数 (6) 代替常数  $q_k^0$  和  $p_k^0$ , 我們便得到受摄运动在原坐标  $q_i, p_i (i=1, \dots, n)$  中的有限方程。

利用正则变换的理論, 可以将哈密頓方程組 (3) 的积分問題轉变为对哈密頓方程組 (1) 和 (5) 的积分; 方程組 (3) 的通解可由組 (1) 和 (5) 的通解 (2) 和 (6) 經叠代而得, 即

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \varphi_i[t, q_k^{[0]}(t, q_j^0, p_j^0), p_k^{[0]}(t, q_j^0, p_j^0)], \\ p_i &= \psi_i[t, q_k^{[0]}(t, q_j^0, p_j^0), p_k^{[0]}(t, q_j^0, p_j^0)] \\ &\quad (i=1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

我們实际上已經指了系統的“能量受摄”和“初始数据受摄”是等价的。現在用图 40 來說明这一点。

在增广相空間的超平面  $t=0$  上取一固定点  $M_0$ , 并由这个点

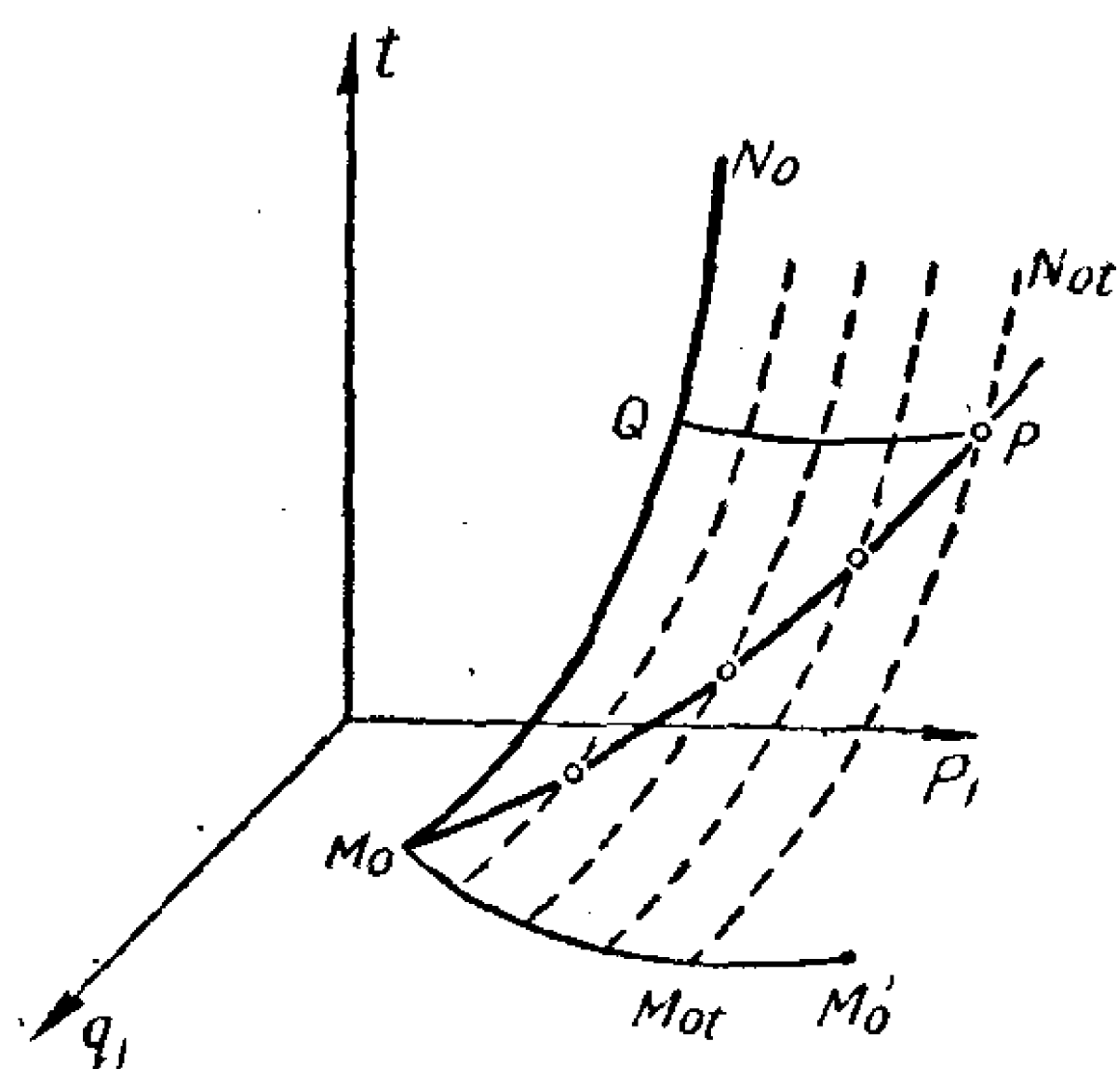


图 40.

引一条未受摄的正路, 即方程組 (1) 的正路 (2)。在图 40 上这条正路用粗綫  $M_0N_0$  表示。始点在超平面  $t=0$  上按函数 (6) 的移动用細綫  $M_0M'$  表示。由曲綫  $M_0M'$  上的一点  $M_{0t}$  引一条未受摄正路  $M_{0t}N_{0t}$  (这条正路在图 40 上用虚綫表示)。在这条正路上取一点  $P$ , 使之具有时刻  $t$  的

給定坐标值。点  $P$  正是系統在受摄运动中于时刻  $t$  所在之位置。在未受摄运动中, 系統于时刻  $t$  所在之位置設为  $Q$ , 則摄动即表現为“移动” $QP$ 。受摄运动的正路如图上粗綫  $M_0P$  所示。因此, 受摄运动可以看作相空間中的“复合”运动: 点沿未受摄正路运动, 而这条正路本身則由于初始数据的“摄动”在移动着(在一般情况下还有变形)。

## § 29. 任意正則變換的結構

在本章的這一節和以下各節，我們將給出正則變換的若干補充知識。

對於任何正則變換，一如 § 25 中對於自由正則變換所作的那樣，也可以建立起一個借母函數和價  $c$  來決定此變換的公式。

假設在以正則變換

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= \varphi_i(t, q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i(t, q_k, p_k) \\ &\left( i=1, \dots, n; \quad \frac{\partial(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, \dots, p_n)} \neq 0 \right) \end{aligned} \quad (1)$$

相互聯系着的  $4n$  個量

$$q_i, p_i, \tilde{q}_i, \tilde{p}_i (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

中，可以選出如下的  $2n$  個量作為獨立變量：

$$\begin{aligned} q_1, \dots, q_l, p_{l+1}, \dots, p_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n \\ (0 \leq l, m \leq n). \end{aligned} \quad (3)$$

於是，利用恒等式

$$\begin{aligned} \sum_{g=l+1}^n p_g \delta q_g &= \varepsilon \left( \sum_{g=l+1}^n q_g p_g \right) - \sum_{g=l+1}^n q_g \delta p_g, \\ \sum_{h=m+1}^n \tilde{p}_h \delta \tilde{q}_h &= \delta \left( \sum_{h=m+1}^n \tilde{q}_h \tilde{p}_h \right) - \sum_{h=m+1}^n \tilde{q}_h \delta \tilde{p}_h \end{aligned}$$

便可將第 126 頁上的基本判別式(9)寫成

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \tilde{p}_j \delta \tilde{q}_j - \sum_{h=m+1}^n \tilde{q}_h \delta \tilde{p}_h - \tilde{H} \delta t &= \\ = c \left( \sum_{i=1}^l p_i \delta q_i - \sum_{g=l+1}^n q_g \delta p_g - H \delta t \right) - \delta U \end{aligned} \quad (4)$$

的形式，其中

$$U = F + \sum_{h=m+1}^n \tilde{q}_h \tilde{p}_h - c \sum_{g=l+1}^n q_g p_g. \quad (5)$$

由于  $4n$  个量(2)全都可以通过  $2n$  个量(3)表出, 所以, 可以认为  $U$  是量(3)的函数。于是, 由恒等式(4)不难得出:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial U}{\partial p_g} = -c q_g, \quad \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_j} = -\tilde{p}_j, \quad \frac{\partial U}{\partial \tilde{p}_h} = \tilde{q}_h \quad (6)$$

$$(i=1, \dots, l; g=l+1, \dots, n; j=1, \dots, m; h=m+1, \dots, n).$$

公式(6)与公式(1)是等价的, 它以价  $c$  和依赖于独立变量(3)的母函数  $U$  决定了所讨论的正则变换。

下面我们要证明一个数学引理, 根据这个引理, 在以变换(1)相联系的  $4n$  个量(2)中, 永远可以选出  $2n$  个独立的, 且其中不包含任何一对共轭变量  $q_i, p_i$  或  $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ ①。于是, 在坐标  $q_i, \tilde{q}_k (i, k=1, \dots, n)$  和与之对应的冲量  $p_i, \tilde{p}_k (i, k=1, \dots, n)$  适当的编号之下, 所选的  $2n$  个独立变量便可以写成如(3)的形式。因此, 对于任何正则变换都有一组公式存在, 它和公式(6)只可能有量(2)编号不同的差别②。

一如在 § 25 中对于自由正则变换所作的那样, 可以证明, 对于任何正则变换, 由其母函数  $U$  的二阶混合偏导数所组成的  $n$  阶行列式也是不等于零的③。因此, 由(6)式的前  $n$  个方程可以将变

① 在哥尔德斯坦的书(Голдстейн Г., Классическая механика, М., 1957, 第 262 页)中, 作者断言, 对于任何正则变换, 永远可以取以下四组量中的一组作为  $2n$  个独立变量:  $q_i$  和  $\tilde{q}_i$ ;  $q_i$  和  $\tilde{p}_i$ ;  $p_i$  和  $\tilde{q}_i$ ;  $p_i$  和  $\tilde{p}_i (i=1, \dots, n)$ 。这一论断是错误的, 可由  $\tilde{q}_1 = -p_1, \tilde{p}_1 = q_1, \tilde{q}_j = q_j, \tilde{p}_j = p_j (j=2, \dots, n)$  这样一个简单正则变换的例子看出。

② 这个论断是卡拉肖道利在他的书(Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erstes Ordnung, 2 Aufl., B. I. 1956, §96)中提出的, 但是, 卡拉肖道利只是就变量  $q_i, p_i$  到变量  $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i (i=1, \dots, n)$  的变换为正则的特殊情形建立了我们的证明所依赖的那个引理(见下面)。

③ 如果以  $r_1, \dots, r_n, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n$  依次表示按系列(3)的顺序所排列的(3)中各变量, 则此条件便可以写成:

$$\det \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial \tilde{r}_k} \right)_{i,k=1}^n \neq 0.$$

量  $\tilde{q}_j, \tilde{p}_h (j=1, \dots, m; h=m+1, \dots, n)$  解出来。将所得到的表达式代入(6)式后  $n$  个方程之后, 我们就可以将正则变换方程(6)写成(1)的形式。

现在来陈述并证明前面所说的那个引理, 它是我們得到用来构成任何正则变换的公式(6)的依据。

**引理.** 如果給定了依赖于  $2n$  个独立变量  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$  的  $2n$  个独立函数  $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n$ , 則由  $4n$  个量  $q_i, p_i, \tilde{q}_i, \tilde{p}_i (i=1, \dots, n)$  中永远可以选出  $2n$  个独立的, 使其中不包含任何一对共轭量  $(q_k, p_k)$  或  $(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k)$ 。

**证明.** 若不然, 也就是說, 假設在所討論的諸量中, 不包含任何一对共轭量的  $2n$  个量总是不独立的。于是, 我們便可由給定的  $4n$  个量中选出这样的  $n+d$  个独立的: 其中前  $n$  个不带  $\sim$  号, 后  $d$  个带  $\sim$  号, 而且使这  $n+d$  个量中沒有共轭的, 同时  $d$  为所有可能值的最大者。按照假設, 应当有  $d < n$ 。

由于調換二共轭量  $q_i$  和  $p_i$  或  $\tilde{q}_i$  和  $\tilde{p}_i$  的地位, 以及对量  $q_i, p_i$  和  $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$  的标号  $1, \dots, n$  作任意置換都不改变引理的条件和結論, 因此, 可以认为我們选出来的就是如下的  $n+d$  个量:

$$q_1, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d \quad (d < n). \quad (7)$$

我們將系列(7)称之为最大基底。显然,

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j &= f(q_1, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d), \\ \tilde{p}_j &= f(q_1, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d) \\ &\quad (j = d+1, \dots, n), \end{aligned} \quad (8)$$

这里  $f$  是表示函数关系的符号①。

无損于討論的一般性, 可以认为不包含于公式(8)的諸量

$$p_1, \dots, p_n, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d$$

中, 量

$$p_1, \dots, p_a, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_b \quad (a \leq n, b \leq d) \quad (9)$$

是基底(7)的函数, 而量

$$p_{a+1}, \dots, p_n, \tilde{p}_{b+1}, \dots, \tilde{p}_d \quad (10)$$

中的每一个都与基底无关。因此,

$$\left. \begin{aligned} p_i &= f(q_1, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d) \quad (i=1, \dots, a), \\ \tilde{p}_k &= f(q_1, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d) \quad (k=1, \dots, b). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

①在不同的公式中, 同一个字母  $f$  表示不同的函数关系。

現在我們指出, 与“独立”量(10)共轭的量  $\tilde{q}_{a+1}, \dots, q_n, \tilde{q}_{b+1}, \dots, \tilde{q}_d$  实际上不包含在(8)式的右端。事实上, 如果  $q_\lambda (\lambda > a)$  真包含在某个  $\tilde{q}_j (j > d)$  的表达式中:

$$\tilde{q}_j = f(\dots, q_\lambda, \dots),$$

則量組  $q_1, \dots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$  便与基底(7)是等价的:

$$\begin{aligned} (q_1, \dots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j) &\sim \\ &\sim (q_1, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d), \end{aligned} \quad (12)$$

即兩組量的任一組中的每一个量都可以通过另一組量来表示, 反之亦然<sup>①</sup>。

因此  $n+d+1$  个量

$$q_1, \dots, q_{\lambda-1}, p_\lambda, q_{\lambda+1}, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$$

是独立的, 这与基底(7)的“最大性”矛盾。

因此, 公式(8)可以写成:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j &= f(q_1, \dots, q_a, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_b), \\ \tilde{p}_j &= f(q_1, \dots, q_a, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_b) \quad (j = d+1, \dots, n). \end{aligned} \quad (13)$$

今以  $q_1, \dots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_1} (a_1 \leq a, b_1 \leq b)$  表示真正包含在公式(13)右端那些量的全体(那怕只出現在某一个式子的右端也罢)。于是,

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j &= f(q_1, \dots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_1}), \\ \tilde{p}_j &= f(q_1, \dots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_1}) \quad (j = d+1, \dots, n). \end{aligned} \quad (14)$$

我們現在来指出, 量  $q_\lambda, \tilde{q}_\mu (\lambda > a, \mu > b)$  实际上并不包含在(11)式那些  $i \leq a_1, k \leq b_1$  的各式中。假若不是这样。例如, 設  $q_\lambda (\lambda > a)$  真包含在 (11) 式  $p_{i_1}$  的表达式中 ( $i_1 \leq a_1$ ):

$$p_{i_1} = f(\dots, q_\lambda, \dots) \quad (i_1 \leq a_1, \lambda > a).$$

但量  $q_{i_1}$  肯定是包含在表达式(14)的某一个之中的; 例如, 設  $q_{i_1}$  包含在  $\tilde{q}_j (j > d)$  的表达式中:

$$\tilde{q}_j = f(\dots, q_{i_1}, \dots) \quad (i_1 \leq a_1, j > d).$$

于是,

$$\begin{aligned} (q_1, \dots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \dots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j) &\sim \\ &\sim (q_1, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d), \end{aligned} \quad (15)$$

因之,  $n+d+1$  个量

$q_1, \dots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \dots, q_{\lambda-1}, p_\lambda, q_{\lambda+1}, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$  是独立的, 这和

<sup>①</sup> 如果  $q_\lambda$  真包含在某个函数关系式中, 則由这个关系式便可以将  $q_\lambda$  解出来。

基底(7)的“最大性”矛盾。

因此,

$$\begin{aligned} p_{i_1} &= f(q_1, \dots, q_a, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_b), \\ \tilde{p}_{k_1} &= f(q_1, \dots, q_a, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_b) \\ (i_1 &= 1, \dots, a_1, k_1 = 1, \dots, b_1). \end{aligned} \quad (16)$$

今以  $q_{a_1+1}, \dots, q_{a_2}, \tilde{q}_{b_1+1}, \dots, \tilde{q}_{b_2}$  表示量  $q_i, \tilde{q}_k (i > a_1, k > b_1)$  中真正包含在 (16) 式右端的那些量。于是,

$$\left. \begin{aligned} p_{i_1} &= f(q_1, \dots, q_{a_2}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_2}) (i_1 = 1, \dots, a_1; a_1 \leq a_2 \leq a), \\ \tilde{p}_{k_1} &= f(q_1, \dots, q_{a_2}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_2}) (k_1 = 1, \dots, b_1; b_1 \leq b_2 \leq b). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

我們現在指出, 量  $q_\lambda, \tilde{q}_\mu (\lambda > a, \mu > b)$  实际上不包含在  $i \leq a_2, k \leq b_2$  的  $p_{i_1}, \tilde{p}_{k_1}$  的表达式(11)中。事实上, 例如, 設  $q_\lambda (\lambda > a)$  真包含在  $p_{i_2} (a_1 < i_2 \leq a_2)$  的表达式中:

$$p_{i_2} = f(\dots, q_\lambda, \dots) \quad (a_1 < i_2 \leq a_2, \lambda > a).$$

但由于  $q_{i_2}$  确实包含在(17)的某一表达式中, 例如在  $p_{i_1}$  的表达式中。于是, 量  $q_{i_1}$  确实包含在(14)的某一个表达式中, 例如, 就在  $\tilde{q}_j (j > d)$  的表达式中, 即:

$$\begin{aligned} p_{i_1} &= f(\dots, q_{i_2}, \dots) \quad (i_1 \leq a_1 < i_2 \leq a_2), \\ \tilde{q}_j &= f(\dots, q_{i_1}, \dots) \quad (i_1 \leq a_1, j > d). \end{aligned}$$

在这种情况下, 如下的一组量:

$$\begin{aligned} q_1, \dots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \dots, q_{i_2-1}, p_{i_2}, q_{i_2+1}, \dots, q_{\lambda-1}, \\ q_{\lambda+1}, \dots, q_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j \end{aligned} \quad (18)$$

便和基底(7)等价。因此,  $p_\lambda$  和量組(18)无关。把  $p_\lambda$  添到量組(18)中, 便得到由  $n+d+1$  个量构成的基底, 这是不可能的。

因此,

$$\begin{aligned} p_{i_2} &= f(q_1, \dots, q_a, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_b), \tilde{p}_{k_2} = f(q_1, \dots, q_a, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_b) \\ (i_2 &= a_1+1, \dots, a_2; k_2 = b_1+1, \dots, b_2). \end{aligned} \quad (19)$$

現在以  $q_{a_2+1}, \dots, q_{a_3}, \tilde{q}_{b_2+1}, \dots, \tilde{q}_{b_3}$  表示  $q_i, \tilde{q}_k (i > a_2, k > b_2)$  中那些真包含在公式(19)里的各个量。等式(19)可以写成:

$$\left. \begin{aligned} p_{i_2} &= f(q_1, \dots, q_{a_3}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_3}) \\ (i_2 &= a_1+1, \dots, a_2; a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a), \\ \tilde{p}_{k_2} &= f(q_1, \dots, q_{a_3}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_3}) \\ (k_2 &= b_1+1, \dots, b_2; b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这个过程可以一直继续下去,直到同时得到等式  $a_s = a_{s+1}$ ,  $b_s = b_{s+1}$  为止。于是,

$$\left. \begin{aligned} p_{i_s} &= f(q_1, \dots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_s}) \\ &\quad (i_s = a_{s-1} + 1, \dots, a_s; a_1 \leq \dots \leq a_s \leq a), \\ \tilde{p}_{k_s} &= f(q_1, \dots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_s}) \\ &\quad (k_s = b_{s-1} + 1, \dots, b_s; b_1 \leq \dots \leq b_s \leq b). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

代替公式(14), (17), (20), ..., (21)则有\*:

$$\tilde{q}_j = f(q_1, \dots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_s}) \quad (j = d+1, \dots, n), \quad (22)$$

$$\tilde{p}_j = f(q_1, \dots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_s}) \quad (j = d+1, \dots, n), \quad (22)$$

$$p_i = f(q_1, \dots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_s}) \quad (i = 1, \dots, a_s), \quad (23)$$

$$\tilde{p}_k = f(q_1, \dots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_s}) \quad (k = 1, \dots, b_s). \quad (24)$$

现在假设  $a_s > b_s$ 。于是由公式(23)可以消去  $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{b_s}$  并得到  $q_i, p_i$  之间的相关关系,这和引理的条件矛盾。

如果  $a_s \leq b_s$ , 则  $a_s \leq b_s + 1$ 。于是, 由公式(22)和(24)可以消去所有的  $q_i$ , 并得到  $\tilde{q}_k, \tilde{p}_k$  之间的相关关系,这仍然和引理条件矛盾。

因此,  $d < n$  的最大基底(7)存在的假定和引理条件是矛盾的。引理得证。

### § 30. 变换的正则性准则 · 拉格朗日括弧

我们来建立几个正则性准则,即由  $q_k, p_k (k=1, \dots, n)$  的  $2n$  个独立函数

$$\tilde{q}_i = \varphi_i(t, q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i(t, q_k, p_k) \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

所定义的变换为正则变换时,函数(1)所应满足的必要充分条件。

设变换(1)是正则的。它的判别式为:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \tilde{H} \delta t = c \left( \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right) - \delta F(t, q_i, p_i). \quad (2)$$

令  $t = \bar{t}$  ( $\bar{t}$  是任一固定值), 则由恒等式(2)得:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i = c \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \delta F(\bar{t}, q_i, p_i). \quad (3)$$

但等式(3)乃是关于不显含时间的变换:

\* 因为  $a_s \geq a_1, b_s \geq b_1$ , 所以, (14)式可以形式地写作(22)式。直接用(14)式也无不可。——译者注



$$\tilde{q}_i = \varphi_i(\bar{t}, q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i(\bar{t}, q_k, p_k) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4)$$

的判別恒等式。因之，公式(4)決定一  $c$  價正則變換，且  $c$  與所選值  $t = \bar{t}$  無關。

反之，假設以不同固定值  $\bar{t}$  替代變換(1)的變量  $t$  而得到的變換全都是同價正則的(價為  $c$ )，則以等式

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} \quad (5)$$

規定函數  $\tilde{H}$  時，我們由等式(3)和(5)便得到等式(2)，這表明依賴於時間  $t$  的變換(1)是正則的。

因此，使依賴於時間的變換(1)是正則變換的必要充分條件是：以任何值  $\bar{t}$  替代變換(1)中的  $t$  時，所得到的不依賴於時間的變換全都是正則的，而且有同樣的價  $c$ 。

因之，在建立正則性准則時，可以只限於不顯含時間變量  $t$  的正則變換：

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= \varphi_i(q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i(q_k, p_k) \\ \left( i=1, \dots, n; \frac{\partial(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, \dots, p_n)} \neq 0 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

正則變換(6)的判別恒等式(2)可以寫成：

$$\sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \delta \tilde{q}_k = c \sum_{k=1}^n p_k \delta q_k - \delta K(q_k, p_k). \quad (7)$$

在此利用公式(1)將  $\delta \tilde{q}_k$  以  $\delta q_i$  和  $\delta p_i$  表出，則等式(7)便具有如下形式：

$$\sum_{i=1}^n (\Phi_i \delta q_i + \Psi_i \delta p_i) = -\delta K(q_k, p_k), \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i} - c p_i, \quad \Psi_i = \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i} \\ (i=1, \dots, n). \end{aligned} \quad (8')$$

寫出等式(8)左端是全微分的條件，我們便得到如下形式的正則性准則：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} \\ (i, k=1, \dots, n). \end{aligned} \quad (9)$$

將表达式(8')代入上式，經簡單變換後便得到：

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_k} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i} \right) &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_k} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p_i} \right) &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_k} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i} \right) &= c \delta_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$(i, k = 1, \dots, n),$$

其中  $\delta_{ik}$  是克朗尼克符号: 当  $i \neq k$  时,  $\delta_{ik} = 0$ ; 当  $i = k$  时,  $\delta_{ik} = 1$

$(i, k = 1, \dots, n).$

如果引入所谓拉格朗日括弧, 则条件(10)便可以写得更为紧凑些。对于两个变量  $q$  和  $p$  的  $2n$  个已知函数  $\varphi_i, \psi_i (i = 1, \dots, n)$ , 拉格朗日括弧定义为如下的表达式①:

$$[qp] = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial q} \frac{\partial \psi_j}{\partial p} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial p} \frac{\partial \psi_j}{\partial q} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (\varphi_j \psi_j)}{\partial (q, p)}. \quad (11)$$

利用这些括弧, 并将公式(6)所确定的函数  $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i (i = 1, \dots, n)$  取作  $\varphi_i, \psi_i$ , 则条件(10)便可以写成

$$\begin{aligned} [q_i q_k] &= 0, \quad [p_i p_k] = 0, \quad [q_i p_k] = c \delta_{ik} \\ (i, k &= 1, \dots, n); \end{aligned} \quad (12)$$

这里  $c$  是正则变换的价。

等式(12)给出了变换(6)是正则变换的必要充分条件。在变换依赖于时间  $t$  的情况下, 条件(12)仍然是正确的, 只要它对任何  $t$  值都满足。

### § 31. 正则变换雅科毕矩阵的耦对性

我们来看正则变换的雅科毕矩阵:

① 建议读者将拉格朗日括弧和 § 15 中所引入的泊松括弧加以比较。在那里是给出了  $2n$  个变量  $q_i, p_i$  的两个函数  $\varphi, \psi$ , 泊松括弧乃是雅科毕行列式  $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q_i, p_i)}$  之和。

而这里却是给出了  $2n$  个依赖于两个变量的函数, 拉格朗日括弧乃是雅科毕行列式之和(11)。

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial q_n} & \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial q_n} & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

这里  $\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}$  是  $n$  阶雅科毕矩阵  $\left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k} \right\|$ 。可以类似地来定义  $n$  阶雅科毕矩阵  $\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}$ ,

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \text{ 和 } \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}.$$

我们在讨论中引入一个特殊的  $2n$  阶矩阵:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中  $E$  是  $n$  阶单位矩阵。令  $M'$  表示矩阵  $M$  的转置矩阵, 则由前节中的关系式(12)可以证明乘积  $M'JM$  恒等于  $cJ$ :

$$M'JM = cJ, \quad (3)$$

其中  $c$  是正则变换的价。

事实上①,

$$M'J = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \right)' & \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \right)' \\ \left( \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \right)' & \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \right)' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \right)' - \left( \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \right)' \\ \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \right)' - \left( \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \right)' \end{bmatrix},$$

① 在矩阵元素为矩阵块的情况下, 其乘法规则和矩阵元素为数的情况完全相同, 即第一个矩阵因子的行乘第二个矩阵因子的列(可参考 Гантмахер Ф. Р., 矩阵论 § 5——有中译本)。

$$M'JM = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} - \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} - \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \\ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right)' \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} - \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right)' \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right)' \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} - \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right)' \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{bmatrix}.$$

但是,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} - \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\right)' \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} &= \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_k} \right\|_{i,k=1}^n = \left\| [q_i, q_k] \right\| = 0. \end{aligned}$$

对于其余的三块也作类似的计算,最后就得到:

$$M'JM = \begin{pmatrix} 0 & -cE \\ cE & 0 \end{pmatrix} = cJ.$$

证毕。

对于单价正则变换,等式(3)可以写成:

$$M'JM = J. \quad (4)$$

满足等式(4)的矩阵  $M$  称为耦对矩阵。由于  $\det J = 1$ , 同时矩阵乘积的行列式又等于各相乘矩阵的行列式之积,因之,由(4)式便有:

$$\det M = \pm 1.$$

因此,耦对矩阵是非奇异的①。

满足关系式(3)的矩阵  $M$  称为  $c$  价的广义耦对矩阵②。

因为前节中的关系式(12)归结为雅科毕矩阵  $M$  的广义耦对性条件,所以变换的正则性准则可以这样来表述:

为使某变换  $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t, q_k, p_k), \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t, q_k, p_k) (i=1, \dots, n)$  成为正则

① 不难验证: 二耦对矩阵之积、任一耦对矩阵之逆以及单位矩阵都仍然是耦对矩阵。因此,耦对矩阵构成一个群——耦对群。

耦对矩阵的主要特征是: 使双线性型  $f = \sum_{i=1}^n (x_i y_i' - y_i x_i')$  中的  $2n$  个变量  $x_i, y_i$  和  $2n$  个变量  $x_i', y_i'$  经受同一个系数矩阵为耦对矩阵  $M$  的线性变换之后,型  $f$  在新变量  $x_i^*, y_i^*$  和  $x_i^{*'}, y_i^{*'}$  中仍保持其原有形式:  $f = \sum_{i=1}^n (x_i^* y_i^{*' } - y_i^* x_i^{*' })$ 。

② 全体广义耦对矩阵(当所有的  $c \neq 0$  时)也构成一个群。如果  $M$  是广义耦对矩阵,则  $\det M = \pm c^n$ 。

变换的必要充分条件是：对应于这个变换的雅科毕矩阵  $M$  是具有常数价  $c$  的广义耦对矩阵（在单价变换的情况下，矩阵  $M$  是普通耦对的）。同时，耦对性条件(3)对于全体变量  $t, q_i, p_i (i=1, \dots, n)$  应当恒等地被满足。

### § 32. 正则变换下泊松括弧的不变性

现在把写成上节等式(3)形式的变换的正则性条件稍微改变一下。将此等式两端左乘以  $(M')^{-1}$ ，再右乘以  $M^{-1}$ ，即得：

$$(M')^{-1}JM^{-1} = \frac{1}{c}J. \quad (1)$$

取上式两端的逆矩阵，并注意到  $J^{-1} = -J$ ①，我们便有：

$$MJM' = cJ. \quad (2)$$

将等式  $M'JM = cJ$  中的雅科毕矩阵  $M$  以其转置矩阵  $M'$  来替代，便得到等式(2)。但这样的替代[见 § 31 公式(1)]归结为将导数  $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_k}, \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_k}$  分别换成导数  $\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i}, \frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial p_i}$ ，也就是把各个导数上下两个字母连同其标号相互对调②。因此，如果等式  $M'JM = cJ$  和如下的一组等式等价：

$$\begin{aligned} [q_i q_k] &= 0, [p_i p_k] = 0, [q_i p_k] = c \delta_{ik} \\ (i, k &= 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (3)$$

则等式(2)便等价于等式组：

$$\begin{aligned} [q_i q_k]^* &= 0, [p_i p_k]^* = 0, [q_i p_k]^* = c \delta_{ik} \\ (i, k &= 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 \* 号表示在拉格朗日括弧中须作如上所述的导数替换。而这样一来，拉格朗日括弧就变成了泊松括弧。事实上，

① 我们在这里利用了以下的规则：矩阵乘积的逆矩阵等于各相乘矩阵的逆矩阵按相反顺序相乘： $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ 。此外，

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

即矩阵  $-J^2$  等于  $2n$  阶单位矩阵。由此即得  $J^{-1} = -J$ 。

（原书这里有误，译文已作更正。——译者注）

② ~ 号仍然留在上面。

$$\begin{aligned}
 [q_i q_k]^* &= \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_k} \right) \right]^* \\
 &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j} \right) = (\tilde{q}_i \tilde{q}_k),
 \end{aligned}$$

其中 $(\tilde{q}_i \tilde{q}_k)$ 乃是函数 $\tilde{q}_i$ 和 $\tilde{q}_k$ 关于独立变量 $q_1, p_1, \dots, q_n, p_n$ 的泊松括弧。完全类似地有:

$$[p_i p_k]^* = (\tilde{p}_i \tilde{p}_k), \quad [q_i p_k]^* = (\tilde{q}_i \tilde{p}_k).$$

因此, 利用泊松括弧可以将变换的正则性条件(4)写成如下形式:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{q}_i \tilde{q}_k) &= 0, \quad (\tilde{p}_i \tilde{p}_k) = 0, \quad (\tilde{q}_i \tilde{p}_k) = c \delta_{ik} \\
 (i, k &= 1, \dots, n).
 \end{aligned} \tag{5}$$

现在来考察依赖于量 $q_i, p_i (i=1, \dots, n)$ 和 $t$ 的二函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 。将这两个函数中的 $q_i, p_i (i=1, \dots, n)$ 借逆正则变换通过 $\tilde{q}_k, \tilde{p}_k (k=1, \dots, n)$ 来表示, 则此二函数便可以看作变量 $\tilde{q}_k, \tilde{p}_k (k=1, \dots, n)$ 的函数。我们以 $(\varphi\psi)$ 和 $(\varphi\psi)^\sim$ 分别表示函数 $\varphi, \psi$ 关于变量 $q_i, p_i$ 和 $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ 的泊松括弧。

现在来证明如下的恒等式成立:

$$(\varphi\psi) = c(\varphi\psi)^\sim. \tag{6}$$

这个恒等式的证明有赖于著名的复合函数组雅科毕行列式

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q_j, p_j)} &= \sum_{\substack{i, k=1 \\ i < k}}^n \left[ \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k)} \frac{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k)}{\partial(q_j, p_j)} + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k)} \frac{\partial(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k)}{\partial(q_j, p_j)} \right] + \\
 &+ \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)} \frac{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)}{\partial(q_j, p_j)} \quad (j=1, \dots, n).
 \end{aligned}$$

将这些恒等式逐项相加即得:

$$\begin{aligned}
 (\varphi\psi) &= \sum_{\substack{i, k=1 \\ i < k}}^n \left[ \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k)} (\tilde{q}_i \tilde{q}_k) + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k)} (\tilde{p}_i \tilde{p}_k) \right] + \\
 &+ \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)} (\tilde{q}_i \tilde{p}_k).
 \end{aligned}$$

根据等式(5), 由此便有:

$$(\varphi\psi) = c \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_j, \tilde{p}_j)} = c(\varphi\psi)^\sim. \tag{7}$$

相反的論断也是正确的。如果对于任意的两个函数  $\varphi$  和  $\psi$ , 在同一个常数  $c \neq 0$  之下, 恒等式(7)被滿足, 則由  $2n$  个变量  $q_i, p_i$  到  $2n$  个变量  $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$  的变换是  $c$  价正则变换①。

对于单价正则变换,  $c = 1$ , 因之

$$(\varphi\psi) = (\varphi\psi)^\sim.$$

換句話說, 对于单价正则变换, 泊松括弧是不变的。单价正则变换的这个性质是这类变换有别于相空間中一切可能变换的标志。

---

① 事实上, 由等式(7)便有

$$\begin{aligned} (\tilde{q}_i \tilde{q}_k) &= c(\tilde{q}_i \tilde{q}_k)^\sim = 0, \quad (\tilde{p}_i \tilde{p}_k) = c(\tilde{p}_i \tilde{p}_k)^\sim = 0, \\ (\tilde{q}_i \tilde{p}_k) &= c(\tilde{q}_i \tilde{p}_k)^\sim = c\delta_{ik}. \end{aligned}$$

## 第五章 系統的平衡穩定性 及其運動穩定性

### § 33. 關於平衡位置穩定性的拉格朗日定理

我們從穩定平衡位置的定義開始。

首先回憶一下什麼是系統的平衡位置<sup>①</sup>。如果在初始時刻，系統以等於零的速度處於某位置，而後永遠停留在該位置上，則這個位置稱為系統的平衡位置。

設完整系統的位置由獨立坐標  $q_1, \dots, q_n$  ( $n$  是系統的自由度) 來確定。如 § 5 中所述，在平衡位置(且僅在此位置)所有廣義力為零： $Q_i = 0 (i = 1, \dots, n)$ <sup>②</sup>。無損於討論的一般性，可以認為系統的平衡位置在坐標原點  $q_1 = \dots = q_n = 0$ 。於是，系統在任何其它位置的坐標  $q_1, \dots, q_n$  便表示出這個位置離開平衡位置的偏差，而這些坐標本身也就稱為系統的偏差。

若在足夠小的初始偏差  $q_i^0$  和足夠小的初始速度  $\dot{q}_i^0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 之下，系統在整個運動時間內不越出平衡位置的某一(預先給定的!)任意小鄰域的邊界，並有任意小的速度  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )，則平衡位置  $q_1 = \dots = q_n = 0$  (或平衡狀態  $q_1 = \dots = q_n = 0, \dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_n = 0$ ) 稱為穩定平衡位置，即在穩定平衡位置上，對於任何  $\varepsilon > 0$ ，可指出  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ，當在初始時刻  $t = t_0$ ，

---

① 見 § 4。

② 若廣義力  $Q_i$  不僅和坐標  $q_k$  有關，而且也 和廣義速度  $\dot{q}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) 有關時，則當平衡位置的坐標代替  $Q_i$  中的坐標  $q_k$ ，同時令其中的廣義速度為零時，等式  $Q_i = 0$  成立。



$$|q_i^0| < \delta, |\dot{q}_i^0| < \delta \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

时, 不等式

$$|q_i(t)| < \varepsilon, |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

对于一切  $t \geq t_0$  成立。

在  $2n$  维状态空间<sup>\*</sup>  $(q_i, \dot{q}_i)$  里很便于对不等式(1)和(2)作几何学的解释。图 41 上(对于  $n=1$  的情况)划出了  $(q, \dot{q})$  平面上坐标原点  $O$  的两个邻域, 它们分别对应于不等式(1)和(2)。若原点  $O$  是稳定平衡状态, 则对于给定的  $\varepsilon > 0$ , 当适当地选取  $\delta > 0$  时, 于时刻  $t_0$  从以  $O$  为中心、 $2\delta$  为边长的正方块内开始的任何运动将永远保留在以  $O$  为中心、 $2\varepsilon$  为边长的正方块内。

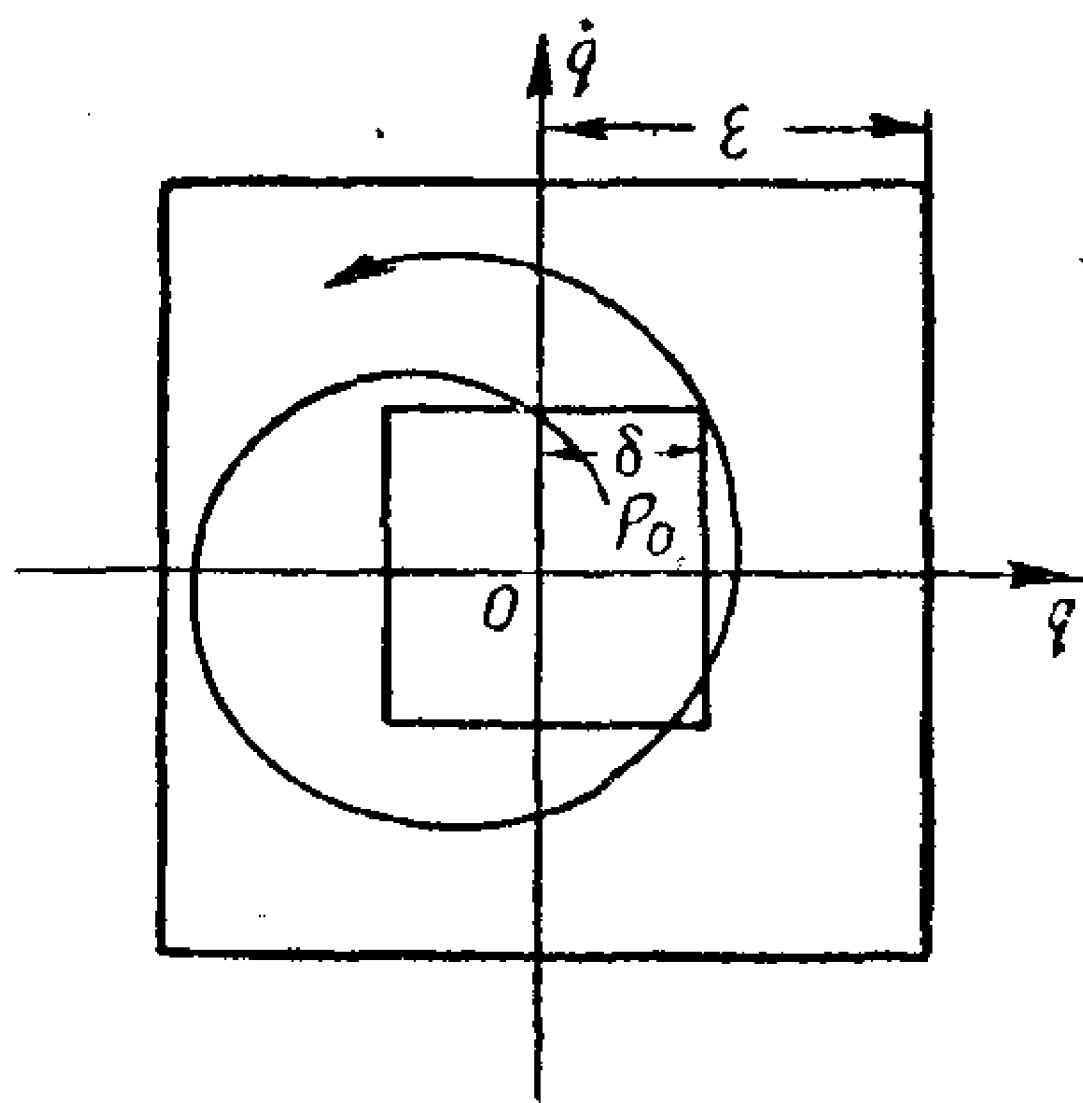


图 41.

**例题 1.** 重球沿位于铅直平面内的圆形轮圈运动。此时有两个平衡位置: 轮圈的最低点和最高点。其中第一个是稳定平衡位置, 第二个是不稳定的平衡位置。

2. 线性振子。平衡位置是稳定的。事实上, 对于线性振子,  $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ ,  $\Pi = \frac{1}{2}cq^2$  ( $m > 0, c > 0$ ), 且其运动微分方程  $m\ddot{q} + cq = 0$  有通解

$$q = q_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0) \quad \left( \omega^2 = \frac{c}{m} \right).$$

因此, 对于给定的  $\varepsilon$ , 例如取,  $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2\omega}, \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)$  时, 只要  $|q_0| < \delta, |\dot{q}_0| < \delta$ , 就有

$$|q(t)| \leq |q_0| + \frac{1}{\omega}|\dot{q}_0| < \varepsilon, |\dot{q}(t)| \leq \omega|q_0| + |\dot{q}_0| < \varepsilon.$$

3. 质量为  $m$  的质点在下述二力作用下沿  $x$  轴的运动: 与偏差成正比的恢复力  $-cx$  和与速度一次方成正比的介质阻力  $-2f\dot{x}$  ( $c > 0, f > 0$ )。

\* 状态空间是指空间  $(q_i, \dot{q}_i)$ ; 相空间是指空间  $(q_i, p_i)$ 。——译者注

點  $x=0$  是穩定平衡位置。我們先看小阻力系數的情況:  $0 < f < \sqrt{mc}$ 。在此情況下, 運動微分方程  $m\ddot{x} + 2f\dot{x} + cx = 0$  有如下的通解:

$$x = e^{-\frac{f}{m}(t-t_0)} \left[ C_1 \cos \frac{d}{m}(t-t_0) + C_2 \sin \frac{d}{m}(t-t_0) \right],$$

其中  $d = \sqrt{mc - f^2}$ ,  $C_1 = x_0$ ,  $C_2 = \frac{1}{d}(fx_0 + m\dot{x}_0)$ 。

由此可知, 對於任何  $t$  值, 都有

$$|x(t)| \leq |C_1| + |C_2| \leq \left(1 + \frac{f}{d}\right) |x_0| + \frac{m}{d} |\dot{x}_0| < \varepsilon$$

和

$$\begin{aligned} |\dot{x}(t)| &\leq \frac{d}{m} \left(1 + \frac{f}{d}\right) (|C_1| + |C_2|) \leq \\ &\leq \frac{d}{m} \left(1 + \frac{f}{d}\right)^2 |x_0| + \left(1 + \frac{f}{d}\right) |\dot{x}_0| < \varepsilon, \end{aligned}$$

只要  $|x_0| < \delta$ ,  $|\dot{x}_0| < \delta$ , 其中可以取

$$\delta = \min \left[ \frac{d\varepsilon}{2m}, \frac{m\varepsilon}{2d \left(1 + \frac{f}{d}\right)^2} \right].$$

若  $f \geq \sqrt{mc}$ , 則運動微分方程  $m\ddot{x} + 2f\dot{x} + cx = 0$  的通解有如下形式:

$$x = C_1 e^{-\nu_1(t-t_0)} + C_2 e^{-\nu_2(t-t_0)},$$

其中

$$\begin{aligned} \nu_{1,2} &= \frac{f \pm \sqrt{f^2 - mc}}{m} > 0, \quad C_1 = \frac{\nu_2 x_0 + \dot{x}_0}{\nu_2 - \nu_1}, \\ C_2 &= \frac{\nu_1 x_0 + \dot{x}_0}{\nu_1 - \nu_2}. \end{aligned}$$

由此可知, 對於任何  $t$  值, 都有

$$|x(t)| \leq |C_1| + |C_2| \leq \frac{(\nu_1 + \nu_2) |x_0| + 2 |\dot{x}_0|}{|\nu_2 - \nu_1|} = \frac{f |x_0| + m |\dot{x}_0|}{\sqrt{f^2 - mc}} < \varepsilon$$

和

$$\begin{aligned} |\dot{x}(t)| &\leq \nu_1 |C_1| + \nu_2 |C_2| \leq \frac{2\nu_1 \nu_2 |x_0| + (\nu_1 + \nu_2) |\dot{x}_0|}{|\nu_2 - \nu_1|} = \\ &= \frac{c |x_0| + f |\dot{x}_0|}{\sqrt{f^2 - mc}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

只要  $|x_0| < \delta$ ,  $|\dot{x}_0| < \delta$ , 其中

$$\delta = \min \left( \frac{\sqrt{f^2 - mc}}{2f} \varepsilon, \frac{\sqrt{f^2 - mc}}{2c} \varepsilon, \frac{\sqrt{f^2 - mc}}{2m} \varepsilon \right).$$

在例 2 和例 3 中, 平衡位置的稳定性是利用对系统运动微分方程进行积分而得到的有限方程来确定的。这些有限运动方程向我们提供了偏差  $q_i$  和广义速度  $\dot{q}_i$  与时间  $t$  和初始数据  $q_i^0, \dot{q}_i^0$  ( $i=1, \dots, n$ ) 之间的关系。但是, 在较复杂的(特别是非线性的)问题中, 要确定并研究这些有限运动方程是极为困难的。因此, 那些无需事先对系统的运动微分方程进行积分, 就能判定平衡位置的稳定性的准则是很有价值的。

托里拆利早在 1644 年就已经知道, 在重力作用下的物体系统, 当其重心处于可能的最低位置时, 系统所在位置是稳定的。拉格朗日将托里拆利的这一原理推广到任意的有势力情况, 并建立了保守系统平衡位置稳定性的准则如下:

**拉格朗日定理<sup>①</sup>。** 如果在某一位置, 保守系统的势能有严格极小值, 则此位置是系统的稳定平衡位置。

**证明。** 无损于一般性, 可以认为在所讨论的位置上, 全体坐标  $q_1, \dots, q_n$  和势能  $\Pi(q_1, \dots, q_n)$  都等于零, 即  $q_1 = \dots = q_n = 0$ ,  $\Pi(0, \dots, 0) = 0$ <sup>②</sup>。因为在给定的系统位置上, 函数  $\Pi$  有极小值, 故在此位置广义力等于零:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n),$$

即点  $q_1 = \dots = q_n = 0$  是系统的平衡位置。其次, 由  $\Pi(0, \dots, 0) = 0$  是严格极小值可知, 在平衡位置的某一  $\Delta$  邻域

$$|q_i| < \Delta \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

内, 只要所有坐标  $q_i$  不同时为零, 就有严格的不等式:

① 在拉格朗日的“分析力学”(1788 年第一版)一书中有此定理, 但定理的严格证明最先是由勒襄·狄利赫里给出的。因此, 常常将这个定理称为勒襄·狄利赫里定理。

② 势能  $\Pi$  的确定只能精确到任意可加常数。适当选择这个常数, 就可以使  $\Pi$  在平衡位置等于零。

$$\Pi(q_1, \dots, q_n) > \Pi(0, \dots, 0) = 0 \quad (4)$$

成立。

今寫出總能量表達式如下：

$$\begin{aligned} E(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) &= T + \Pi = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k + \Pi(q_1, \dots, q_n). \end{aligned} \quad (5)$$

根據不等式(4)以及當廣義速度  $\dot{q}_i$  不全為零時便有  $T > 0$ ①可以斷定，在滿足不等式(3)的條件下，只要所有的  $2n$  個量  $q_i, \dot{q}_i (i=1, \dots, n)$  不同時為零，总有

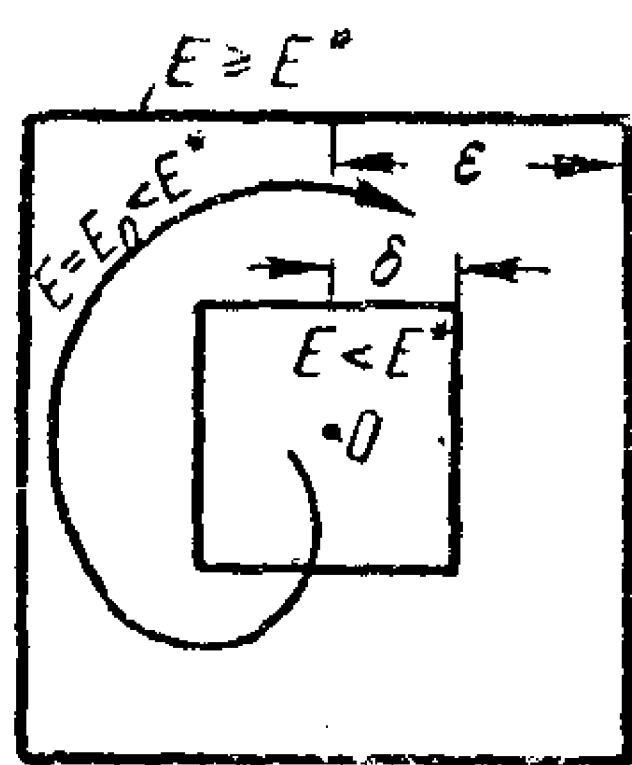
$$E > 0,$$

即在  $2n$  維狀態空間的坐標原點  $O$ ，其值為零的總能量  $E(q_i, \dot{q}_i)$  在該點有嚴格極小值(等於零)。

在  $O$  與  $\Delta$  之間任取一數  $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \Delta$ ，我們來看在按不等式

$$|q_i| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i| < \varepsilon \quad (i=1, \dots, n) \quad (6)$$

所確定的  $\varepsilon$  鄰域的邊界上總能量  $E$  的值(圖 42)。由於此邊界為



一閉的點集，故連續函數  $E$  必在此邊界上達到自己的極小值  $E^*$ 。又因為在  $\varepsilon$  鄰域的邊界上，所有  $E$  值都是正的，所以極小值  $E^*$  也是正的。因此，在  $\varepsilon$  鄰域的邊界上

$$E \geq E^* > 0. \quad (7)$$

另外，既然連續函數  $E$  在坐標原點  $O$  的值為零，則必有點  $O$  的一個  $\delta$  鄰域存在②，使在此

鄰域內

① 如果在坐標空間原點  $O$  的  $\Delta$  鄰域內無奇點，則這個論斷是正確的(見第 40 頁的腳注)。設點  $O$  (函數  $\Pi$  在其上取極小值)不是奇點。因而  $O$  點的某一  $\Delta_0$  鄰域將不包含奇點。我們取  $\Delta < \Delta_0$ 。

② 由於在  $\delta$  鄰域內不等式(8)成立，所以  $\delta \leq \varepsilon$ 。

$$E < E^*. \quad (8)$$

因此, 如果初始坐标和初始速度满足不等式(1), 则初始能量  $E_0 < E^*$ . 但当保守系统运动时其总能量保持初值  $E_0$  不变, 故在整个运动时间里  $E < E^*$ . 这表明, 当系统运动时, 状态空间中表示这一运动的点不可能达到  $\varepsilon$  邻域的边界(因为在边界上  $E \geq E^*$ ), 而永远位于此邻域之内。

定理证毕。

对上述定理我们有如下的两个附注:

注 1. 对于那种在保守系统上附加以迴轉仅力和耗散力而得到的非保守系统, 拉格朗日定理仍然是正确的。 因为迴轉仅力并不破坏总能量守恒定律(見 § 8), 因此, 当有迴轉仅力存在时, 定理的全部证明无需改变仍然有效。至于耗散力的情况, 则因为系统于运动时总能量  $E = T + \Pi$  不断减少, 故在运动过程中等式  $E = E_0$  将被不等式  $E \leq E_0$  所代替。但由此也可以断定, 只要  $E_0 < E^*$ , 则在整个运动过程中仍将有  $E < E^*$ . 因之, 在此稍加修改, 定理的证明仍然有效。

注 2. 保守系统的平衡位置在以下情况也是稳定的: 势能  $\Pi$  在此位置有非严格极小值, 但在平衡位置的任意  $\varepsilon$  邻域内, 都有包含平衡位置于其内的封闭超曲面

$$f(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (9)$$

存在, 使得势能在其上的值严格地大于  $\Pi$  在平衡位置的值。

事实上, 若仍然假设在平衡位置  $q_1 = \dots = q_n = 0$ ,  $\Pi(0, \dots, 0) = 0$ . 此外, 还假设超曲面方程(9)是这样取的: 位于此闭曲面内的点满足不等式

$$f(q_1, \dots, q_n) > 0. \quad (10)$$

于是, 不等式(10)和不等式

$$|\dot{q}_k| < c_k \quad (0 < c_k < \varepsilon; k = 1, \dots, n) \quad (11)$$

一起在  $2n$  维状态空间中确定了一个位于  $\varepsilon$  邻域(6)之内的区域  $G$  (有界“超柱体”)。在区域  $G$  的边界上, 或是  $f = 0$  (此时  $\Pi > 0$ ,  $T \geq 0$ ), 或是在某一个  $k$  之下等式  $|\dot{q}_k| = c_k$  成立(此时  $T > 0$ ,  $\Pi \geq 0$ )。因此, 严格不等式  $E = T + \Pi > 0$  在区域  $G$  的边界上永远被满足。

在所討論的情況下，函數  $E$  在  $\varepsilon$  鄰域(6)的邊界上的極小值可能等於零。此時在拉格朗日定理的證明中，需將  $\varepsilon$  鄰域換成位於其內的區域  $G$ 。在區域

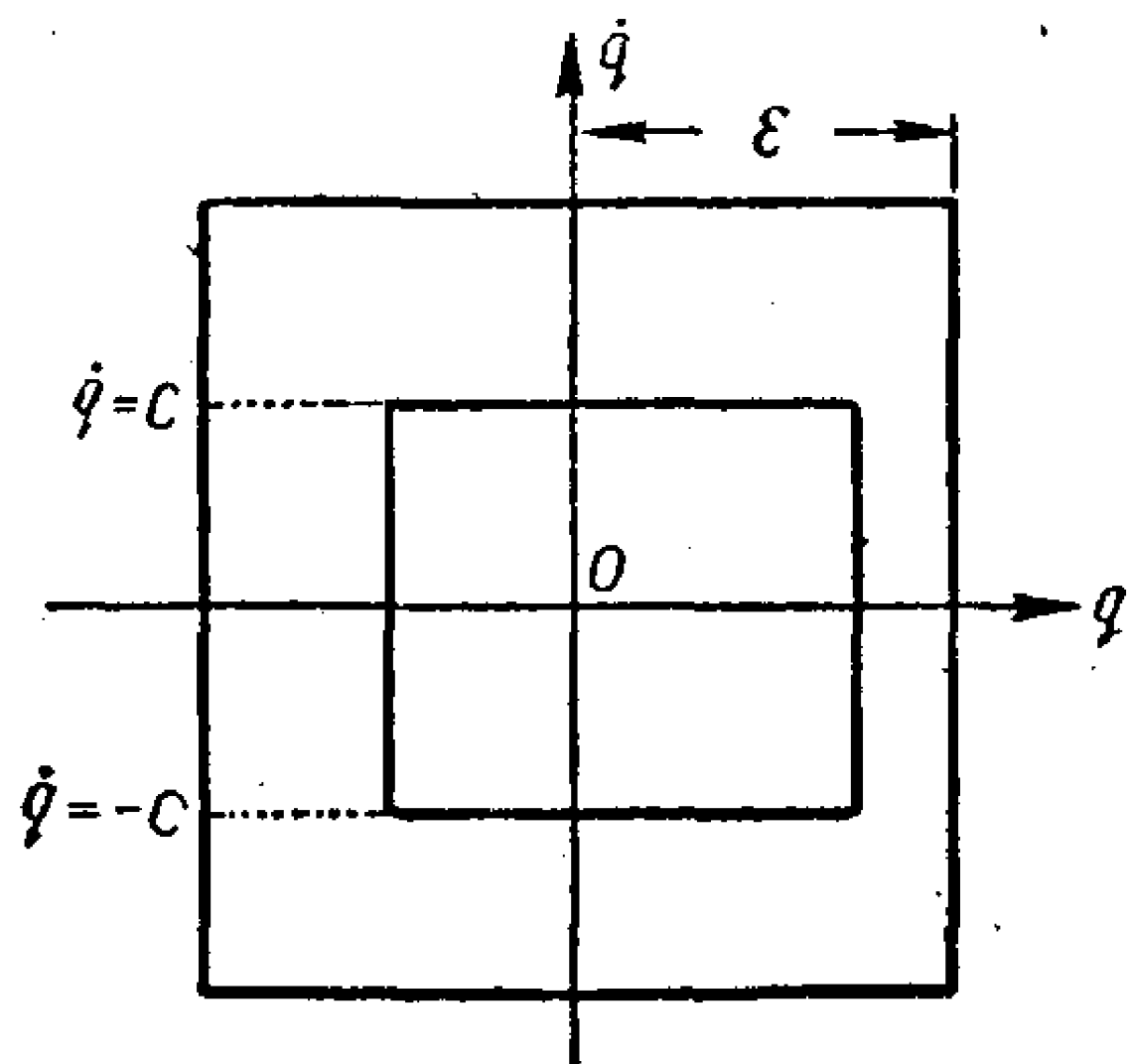


圖 43.

$G$  的邊界上，總能量的極小值  $E^* > 0$ 。證明的其餘部分無需改變。

當  $n=1$  時，封閉超曲面(9)退化為  $q$  軸上原點兩側的兩個點所組成的集合，而區域  $G$  則退化為位於點  $O$  的  $\varepsilon$  鄰域內的長方形(圖 43)。

當系統上還作用有迴轉儀力和耗散力時，注 2 所述一切仍然有效(見注 1)。

如果函數  $\Pi$  在引自平衡位置的某條連續曲線上處處有極小值  $\Pi=0$ ，則

這個平衡位置可能是不穩定的。具有如下勢能的自由質點就是這種情況的一個例子：勢能函數不包含某一個坐標，例如  $x$ ，即  $\Pi = \Pi(y, z)$ ，同時  $\Pi(0, 0) = 0$ ，當  $y^2 + z^2 > 0$  時， $\Pi(y, z) > 0$ 。在這個例子中，極小值點填滿了  $x$  軸。此時平衡位置  $x=y=z=0$  是不穩定的，因為當沿  $x$  軸方向給質點無論多麼小的初速度時，質點都將沿  $x$  軸作等速運動。

第 163 頁上的例 1 和例 2 所討論的是保守系統，而在例 3(第 163 頁)中，質点上作用有耗散力。在例 1 中輪圈的最底點和例 2、3 中的  $x=0$  處，勢能都具有嚴格的極小值。因此這些平衡位置是穩定的。

例 4. 勢能  $\Pi = q^4 \sin^2 \frac{1}{q}$  [補充定義:  $\Pi(0) = 0$ ] 的一自由度保守系統。根據注 2 可知， $q=0$  是穩定的平衡位置。

### § 34. 平衡位置不穩定准則 · 李亞普諾夫和契塔也夫定理

早在 1892 年，李亞普諾夫就曾在其著名的學位論文“關於運動穩定性的一般問題”中提出了關於拉格朗日定理的逆問題。這個問題直到今天還沒有完全解決。李亞普諾夫的两个定理和契塔也夫的定理部分地解決了這一問題。在這些定理中，對平衡位置的不穩定性建立了若干充分條件。

我們仍然假設在平衡位置  $q_1 = \dots = q_n = 0$ ， $\Pi(0, \dots, 0) = 0$ 。現在將勢能

按坐标之幂(“偏差”)展成级数:

$$\Pi = \Pi_m(q_1, \dots, q_n) + \Pi_{m+1}(q_1, \dots, q_n) + \dots$$

$$[\Pi_m(q_1, \dots, q_n) \neq 0, m \geq 2], \quad (1)$$

其中  $\Pi_k(q_1, \dots, q_n)$  是  $k$  次齐次函数 ( $k = m, m+1, \dots$ ); 由于在平衡位置处全体  $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 = 0$ , 故实际出现在展开式中的最低次项的次数  $m \geq 2$ 。

**李亚普諾夫定理 I.** 如果保守系统的势能  $\Pi(q_1, \dots, q_n)$  按其展开式(1)的二次项  $\Pi_2(q_1, \dots, q_n)$  ① 就能断定它在平衡位置无极大值, 则此平衡位置是不稳定的。

**证明.** 将动能表达式  $T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$  的系数  $a_{ik}(q_1, \dots, q_n)$  按坐标之幂展成级数, 并以  $a_{ik}^0$  表示自由项[即函数  $a_{ik}(q_1, \dots, q_n)$  在  $q_1 = \dots = q_n = 0$  之值]。于是, 当令  $T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^0 \dot{q}_i \dot{q}_k$  时, 便有

$$T = T_0 + (*), \quad \Pi = \Pi_2 + (*);$$

这里及以后, 凡(\*)都表示就坐标和速度而言, 那些比该式中(\*)号之前的各项较高阶小的诸项之和。因为  $T_0$  是常系数正定二次型, 故可用变量的非奇异线性变换同时将两个二次型  $T_0$  和  $\Pi_2$  化为平方和。在新变量  $\theta_1, \dots, \theta_n$  之下,  $T$  和  $\Pi$  的展开式取如下形式②:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \dot{\theta}_k^2 + (*), \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k \theta_k^2 + (*). \quad (2)$$

由于二次型  $\Pi_2$  要取到某些负值, 故至少有一个  $\lambda_k < 0$ 。

在  $\theta$  坐标中, 拉格朗日方程有如下形式:

$$\ddot{\theta}_k = -\lambda_k \theta_k + (*) \quad (k=1, \dots, n). \quad (3)$$

我们来考察如下的辅助二次型:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left[ \left( \lambda_k^2 + \lambda_k + \frac{\mu^2}{2} \right) \theta_k^2 + \mu(1 - \lambda_k) \theta_k \dot{\theta}_k + \left( 1 + \lambda_k + \frac{\mu^2}{2} \right) \dot{\theta}_k^2 \right], \quad (4)$$

① 即  $m=2$ , 而且  $\Pi_2$  是取负值的二次型(也可以是非正的)。

② 坐标  $\theta_1, \dots, \theta_n$  称为简正坐标或主坐标。在 § 41 将更仔细地讨论它们。

當  $\lambda_k \geq 0$  時, 式中的  $\varepsilon_k = 1$ , 當  $\lambda_k < 0$  時,  $\varepsilon_k = -1$  ( $k = 1, \dots, n$ ), 而數  $\mu > 0$ .

根據方程(3)和等式(4)不難驗證, 在系統運動過程中

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mu t}V) = e^{-\mu t} \left[ \mu \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left( \lambda_k + \frac{\mu^2}{4} \right) (\theta_k^2 + \dot{\theta}_k^2) + (*) \right]. \quad (5)$$

無損於討論的一般性, 我們將認為  $\lambda_1 < 0$ , 且  $\lambda_1$  是負  $\lambda_k$  中最大的那一個。正數  $\mu$  是這樣選的: 它同時滿足不等式

$$\lambda_1 + \frac{\mu^2}{4} < 0, \quad \lambda_1^2 + \lambda_1 + \frac{\mu^2}{2} > 0. \quad (6)$$

由第一個不等式可以斷定, 等式(5)右端的和式是正定二次型。因之, 當  $\theta_k$  和  $\dot{\theta}_k$  (按絕對值) 充分小時:

$$|\theta_k| < \Delta, \quad |\dot{\theta}_k| < \Delta \quad (k = 1, \dots, n), \quad (7)$$

等式(5)的右端將永遠是正的, 即

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mu t}V) > 0,$$

由此便有

$$e^{-\mu t}V > e^{-\mu t}V_0.$$

或

$$V > V_0 e^{\mu(t-t_0)}. \quad (8)$$

假設除  $\theta_1^0$  而外, 所有的  $\theta_k^0, \dot{\theta}_k^0$  ( $k = 1, \dots, n$ ) 全都為零, 而且  $\theta_1^0$  的模小於  $\Delta$ 。於是, 由等式(4)和(6)中第二個不等式便有  $V_0 > 0$ 。而這正表明, 無論  $|\theta_1^0|$  多么小, 運動都必將越出領域(7)的界限, 因為在相反的情況下, 由不等式(8)便有  $\lim_{t \rightarrow \infty} V = \infty$ , 但二次型  $V$  在領域(7)中卻是有界的。

定理證畢。

當展開式(1)中  $m > 2$  時, 可應用以下兩個定理; 我們在此只引入這些定理而不予證明<sup>①</sup>。

**李亞普諾夫定理 II.** 若保守系統的势能  $\Pi$  由其展開式(1)的最低次項

① 讀者可在下列各書中找到這些定理的證明: Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, 1935, § 16 和 25; Четаев Н. Г., Устойчивость движения, 1955, § 17; Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 1952, § 14 和 17。(后兩本均有中譯本。——譯者)



$\Pi_m(q_1, \dots, q_n)$  ( $m \geq 2$ ) 就可以断定它在  $q_1 = \dots = q_n = 0$  时有严格极大值①, 则位置  $q_1 = \dots = q_n = 0$  是系统的不稳定平衡位置。

**契塔也夫定理.** 若保守系统的势能  $\Pi$  是偏差  $q_1, \dots, q_n$  的齐次函数, 而且在平衡位置  $q_1 = \dots = q_n = 0$  处无极小值, 则此平衡位置不稳定。

**例题 1.** 设  $\Pi = A(1 - \cos \alpha q)$ ;  $n = 1$ 。函数  $\Pi$  在点  $q_{2k} = \frac{2k\pi}{\alpha}$  处有严格极小值, 而在点  $q_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{\alpha}$  处有严格极大值 ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )。同时, 极大值的情况, 可按偏差之幂的展开式

$$\Pi = -\frac{\alpha^2}{2}(q - q_{2k-1})^2 + \dots$$

的最低次项断定。于是, 根据拉格朗日定理和李亚普诺夫定理, 点  $q_{2k}$  对应于稳定平衡位置, 而点  $q_{2k-1}$  则对应于不稳定的平衡位置。

2.  $\Pi = Aq_1 \dots q_n$ 。由契塔也夫定理可知, 位置  $q_1 = \dots = q_n = 0$  是不稳定的平衡位置。

### § 35. 平衡位置的渐近稳定性·耗散系统

现在来引入关于平衡位置渐近稳定性的概念。我们将如下的稳定平衡位置称之为渐近稳定的平衡位置: 若在此位置, 当初始偏差和初始速度的绝对值充分小时, 所有的偏差和速度均随时间  $t$  的无限增长而趋于零, 即存在一个数  $\delta_0 > 0$ , 使得当不等式

$$|q_i^0| < \delta_0, \quad |\dot{q}_i^0| < \delta_0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1')$$

被满足时便有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

从几何意义上来看(图 44), 这就意味着, 在状态空间  $(q_i, \dot{q}_i)$  中, 自坐标原点  $O$  的

$\delta_0$  邻域内开始的所有轨道, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 都将渐近地逼近  $O$  点。

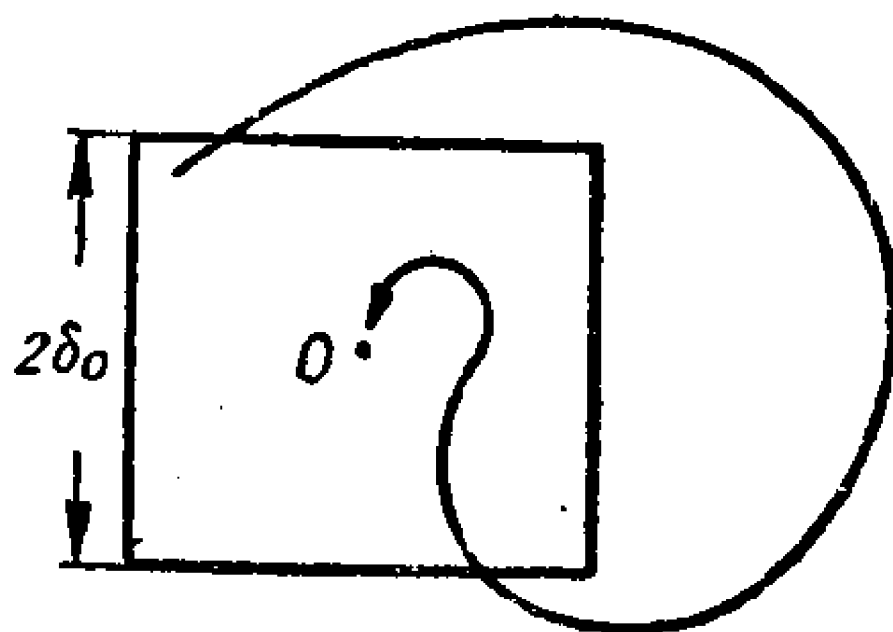


图 44.

① 也就是说, 在坐标原点的某一邻域内 (除去原点本身) 恒有  $\Pi_m(q_1, \dots, q_n) < 0$ 。这只有当  $m$  为偶数时才有可能。

第 163 頁上所討論的例題 1, 2, 3, 僅例 3 中的穩定平衡位置是漸近穩定的。

我們來討論在有勢力  $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$  和非有勢力  $\tilde{Q}_i (i=1, \dots, n)$  作用下的平穩系統, 並假設勢能  $\Pi$  和非有勢力  $\tilde{Q}_i$  都不明顯地依賴於時間:

$$\Pi = \Pi(q_k), \quad \tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(q_k, \dot{q}_k) \quad (i=1, \dots, n). \quad (2)$$

在這種情況下, 時間  $t$  不明顯地出現在拉格朗日方程中, 它可以寫成已就廣義加速度解了出來的形式(見 § 7, 第 41 頁):

$$\ddot{q}_i = G_i(q_k, \dot{q}_k) \quad (i=1, \dots, n). \quad (3)$$

在所討論的情況下, 平穩系統的總能量  $E$  也不顯含時間:

$$E = E(q_k, \dot{q}_k). \quad (4)$$

計算它在系統運動時對時間的全導數, 便得到:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial E}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} G_i \right) = E'(q_k, \dot{q}_k). \quad (5)$$

因此, 在狀態空間  $(q_k, \dot{q}_k)$  的每一點, 不僅總能量, 而且還有總能量對時間的全導數都有確定的值。

若  $\tilde{Q}_i (i=1, \dots, n)$  是耗散力(見 § 8), 則系統運動過程中  $\frac{dE}{dt} \leq 0$ , 即函數  $E'(q_k, \dot{q}_k)$  在狀態空間中所討論的區域內只取非正值。

在定耗散系統(見 § 8)情況下<sup>①</sup>, 除平衡狀態而外的任何運動中, 除去所有  $\dot{q}_i = 0$  的那些時刻, 恒有

$$\frac{dE}{dt} = E'(q_k, \dot{q}_k) < 0 \quad (6)。$$

對這種系統, 有如下的

**漸近穩定性定理.** 若平穩定耗散系統的勢能在某孤立平衡位

① 原書此段以及對漸近穩定性定理的表述和證明都有錯誤。作者在給蘇聯“Прикладная Математика и Механика”雜誌編輯部的一封信(見 Прикл. Матем. и Механ., Т. XXVI, вып. 2, 1962, 392 頁)中對此作了改正。譯文(第 172—173 頁)按此信作了相應的更正。——編者注

置(即其领域内无其它平衡位置)有严格极小值, 则此平衡位置是渐近稳定的。

**证明.** 按拉格朗日定理的注 1, 所给平衡位置是稳定的。因之, 在状态空间中, 始点充分靠近原点的一切运动都将不越出原点的某一领域。按定理的条件, 在 origin 某领域内异于原点的一切点上, 系统的能量

$$E > 0. \quad (7)$$

由系统的定耗散性有  $E' \leq 0$ , (8)

且“=”仅在所有  $\dot{q}_i = 0$  的那些点的集合  $M$  上成立。于是, 由微分方程解对初值的连续依赖性知, 在充分小的  $|q_i^0|$ ,  $|\dot{q}_i^0|$  之下, 所有积分曲线(运动)将渐近地趋近于包含在  $M$  内的最大不变集合<sup>①</sup>  $T$ 。在所考察的情况下, 集合  $T$  只可能由平衡状态构成, 因为它们是在  $M$  内仅有的不变集合(包含在  $M$  内的运动)。在平衡位置为孤立的情形, 集合  $T$  仅由此平衡状态的一点构成。定理得证<sup>②</sup>。

在第 164 页上的例 3 中,  $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c x^2$ ,  $\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + c x \dot{x} = (m \ddot{x} + c x) \dot{x} = -2f \dot{x}^2 < 0$  (因  $f > 0$ ), 故系统是定耗散的, 平衡位置是渐近稳定的。

关于平稳定耗散系统在其渐近稳定平衡位置邻域内的运动, 将在 § 46 中研究。

上面所证明的定理, 是拉格朗日定理在耗散系统上的应用, 李亚普诺夫曾以更一般的形式建立了这一定理。

李亚普诺夫发现, 在拉格朗日定理(渐近稳定性定理)的证明

① 微分方程组  $\dot{x} = X(x)$  (矢量形式) 的解  $x = f(x_0, t)$  构成一个以  $t$  为参数的空间变换群。若集合  $T$  在群的所有变换下变到自身, 即  $f(T, t) = T$  ( $-\infty < t < \infty$ ), 则称  $T$  为对群  $f(x_0, t)$  的不变集合。对于固定的  $x_0$ , 函数  $f(x_0, t)$  称之为运动; 点集  $\{f(x_0, t); -\infty < t < \infty\}$  称之为这一运动的轨道。显然, 不变集合只能由整条轨道构成。这种轨道有三个主要的拓扑类型: 点、简单闭曲线和开区间相互一意的连续映象。它们分别对应于平衡位置、周期运动和非周期运动。——译者注

② § 33 末所作之注 2 对此定理仍然有效。

中，可以将能量  $E$  換成有連續一階偏導數的任何連續函數  $V(q_k, \dot{q}_k)$ ，這函數在平衡狀態有嚴格極小值，而且在系統任何運動中不增大(嚴格遞減)。而證明的其餘部分依舊不變。

今按運動方程(3)來計算函數  $V$  對時間的導數：

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial V}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} G_i(q_k, \dot{q}_k) \right] = V'(q_k, \dot{q}_k). \quad (9)$$

由上式可以斷定，函數  $V'$  在狀態空間坐標原點  $O$  為零，這是因為  $O$  點與平衡狀態相對應，而在平衡狀態處所有的  $\dot{q}_i = 0$ ，所有的  $\ddot{q}_i = G_i = 0$ 。若函數  $V$  在任何運動中都不增大，則  $\frac{dV}{dt} = V'(q_k, \dot{q}_k) \leq 0$ 。在此情況下，函數  $V'$  在平衡狀態  $O$  有極大值。如果這個極大值還是嚴格的，則在  $O$  點的某一鄰域內（ $O$  點本身除外）將有  $V' < 0$ ，因而在系統運動中，函數  $V$  在此鄰域內將嚴格遞減。

還應注意，在穩定性準則的表述中，“極小值”和“極大值”二詞的地位是可以互相對調的，因為只要把函數  $V$  換成函數  $-V$  我們就仍回到原來的表述形式。

因此，可以認為下述定理已經證明：

**定理。** 設有平穩系統，其上作用力不明顯依賴於時間。若其平衡位置已經給定，且存在連同一階偏導數連續的函數  $V(q_k, \dot{q}_k)$ ，在給定的平衡狀態有嚴格極值，則當  $V$ （按運動方程計算的）對時間的導數  $V'$  在此同一狀態有相反的極值時，所給平衡位置是穩定的。若此導數極值同時還是嚴格的，則平衡位置是漸近穩定的。

定理中說到的函數  $V(q_k, \dot{q}_k)$  通常稱為李亞普諾夫函數。

### § 36. 條件穩定性 · 問題的一般提法 · 運動或任一過程的穩定性 · 李亞普諾夫定理

在第 163 頁上，定義平衡位置穩定性的不等式 (1) 和 (2) 是就

全体偏差  $q_i$  和全体广义速度  $\dot{q}_i$  而言的。然而在許多問題中，我們將遇到条件稳定性問題。此时这些不等式仅为  $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  这  $2n$  个量中的某几个所滿足，或更一般的提法是为这  $2n$  个量的某些函数  $x_1, \dots, x_m$ ：

$$x_i = f_i(q_k, \dot{q}_k) \quad (i=1, \dots, m) \quad (1)$$

所滿足。同时，假設函数(1)在

$$q_k = 0, \dot{q}_k = 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

时全都等于零，即  $f_i(0, \dots, 0) = 0$ ，而且滿足自治的<sup>①</sup>一阶常微分方程組<sup>②</sup>：

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_m, t) \quad (i=1, \dots, m), \quad (2)$$

其中  $X_i(x_1, \dots, x_m, t)$  ( $i=1, \dots, m$ ) 是区域

$$|x_i| \leq \Delta, t \geq t_0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (3)$$

中的連續函数( $t_0$  是固定的初始时刻)。

微分方程組(2)的零解  $x_i \equiv 0$  ( $i=1, \dots, m$ ) 对应于平衡状态。零解的存在要求方程(2)的右端滿足条件

$$X_i(0, \dots, 0, t) \equiv 0 \quad (i=1, \dots, m). \quad (4)$$

从数学观点上說，这就是关于微分方程組(2)的零解的稳定性問題，这个稳定性被定义为：对于任何  $\varepsilon > 0$ ，必有一  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  存在，只要

$$|x_i(t_0)| < \delta \quad (i=1, \dots, m), \quad (5)$$

則对于任何  $t \geq t_0$  便有

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i=1, \dots, m). \quad (6)$$

为了对不等式(5)和(6)作几何上的解釋，我們將用到  $m$  維空

① 見第 76 頁脚注②。

② 当研究平穩系統的条件稳定性时，函数  $X_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) 不显含時間  $t$ 。我們將  $t$  作为变量写入右端是指非平穩系統和更一般的情况。

間  $(x_1, \dots, x_m)$  坐标原点的  $\delta, \delta$  邻域。对于漸近穩定性情形, 还需补充要求: 存在一  $\delta_0 > 0$ , 使当

$$|x_i(t_0)| < \delta_0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (7)$$

时便有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (8)$$

如果研究平衡位置的絕對穩定性, 那就可以取量  $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  或  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$  作为  $x_1, \dots, x_m$ 。在头一种情况, 方程組(2)乃是写成关于未知函数  $q_1, \dots, q_n$  的一組  $2n$  个一阶微分方程形式的拉格朗日方程。在第二种情况, 方程組(2)則是哈密頓正則方程:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9)$$

我們来討論方程組(2)的两个重要的特殊情况(它們在应用中經常遇到):

1°. 平穩情况。方程(2)的右端  $X_i$  不显含時間  $t$ , 即

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

2°. 周期情况。右端部分  $X_i$  关于变量  $t$  有周期  $\tau$ :

$$X_i(x_1, \dots, x_m, t + \tau) = X_i(x_1, \dots, x_m, t) \quad (i = 1, \dots, m).$$

在这两种情况下, 微分方程組(2)的零解的穩定性可借下述定理来判定。这个定理是 § 35 末所引入的定理的直接推广。

**李亚普諾夫定理。** 若在平穩的或周期的情况下, 区域(3)中有連同其一阶偏导数連續的函数  $V(x_1, \dots, x_m, t)$  存在, 对于(看作参数的)  $t$  的任何值, 在点  $x_1 = \dots = x_m = 0$  处有严格极值, 且对時間

的导数  $V'(x_1, \dots, x_m, t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial V}{\partial t}$  有相反的极值, 則方程

組(2)的零解穩定。若导数的极值同时还是严格的, 則方程組(2)

的零解渐近稳定。这里假设函数  $V$  在平稳情况不显含  $t$ ，而在周期情况，对于  $t$  是周期的，周期为  $\tau$  [ $\tau$  是方程(2)右端部分的周期]。

对此定理的证明，只要就周期情况进行就够了，因为平稳情况可以看作具有任意周期  $\tau$  的特殊情形。我们将稳定情况和渐近稳定情况分开来证。

对于稳定情况，只要将差  $V(x_1, \dots, x_m, t) - V(0, \dots, 0, t)$  看作  $E$ ，将  $m$  维空间  $(x_1, \dots, x_m)$  看作空间  $(q_i, \dot{q}_i)$ ，再逐句重复前面拉格朗日定理的证明就行了。至于函数  $V$  中所出现的  $t$ ，由于它被看作参数（根据周期性，它可以在有限区间  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$  内变化），所以不会使定理的证明复杂化。

对于渐近稳定情况，证明如下。

为确定计，设在空间  $(x_1, \dots, x_m)$  的原点  $O$  函数  $V$  有严格极小值， $V'$  有严格极大值。令

$$E = V(x_1, \dots, x_m, t) - V(0, \dots, 0, t),$$

则由定理的条件知，在原点  $O$  的某  $\varepsilon$  邻域内异于  $0$  的一切点上

$$E(x_1, \dots, x_m, t) > 0 \quad (I)$$

$$\frac{dE}{dt} = V'(x_1, \dots, x_m, t) - V'(0, \dots, 0, t) \equiv E' < 0 \textcircled{1}. \quad (II)$$

由前面所证明的稳定情况知，组(2)的零解是稳定的，故存在一数  $\delta_0 > 0$ ，使组(2)初值在原点  $O$  的  $\delta_0$  邻域内的一切解不越出  $\varepsilon$  邻域(图45)。对于这些解中的任何一个，由于函数  $E$  随  $t$  递减，所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = E_{\infty} \geq 0$$

而且

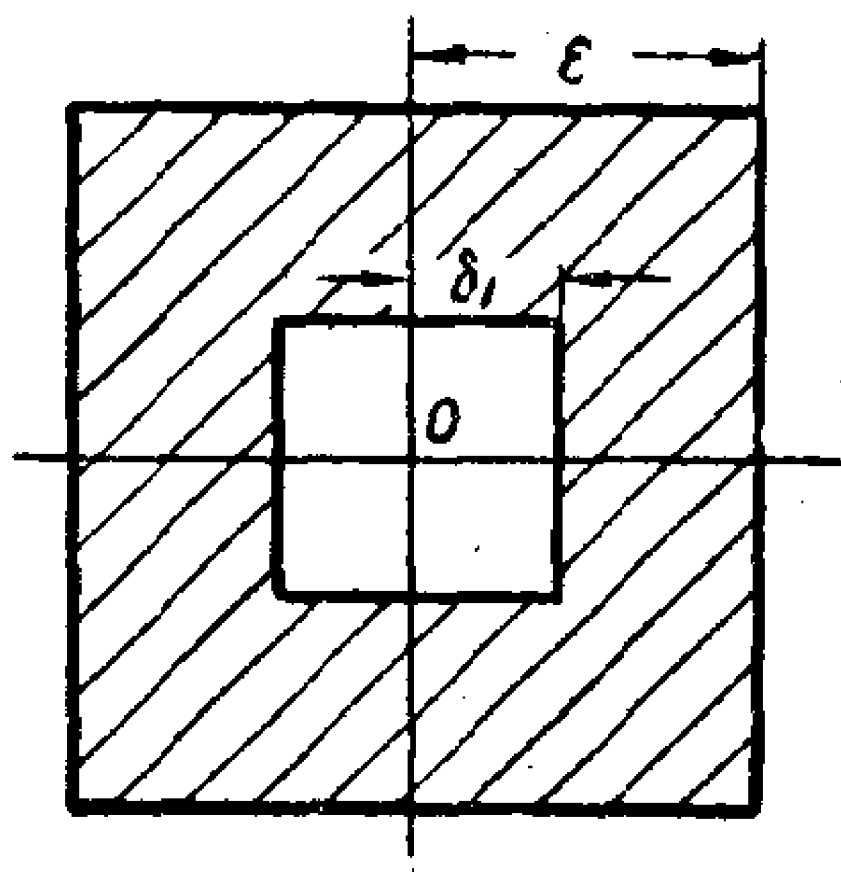


图 45.

① 由不等式(I)和(II)可以断定，在原点  $O$  函数  $E$  有严格极小值，而其时间导数  $E'$  有严格极大值(在原点  $O$ ，函数  $E$  和  $E'$  同为零)。



$$E(t) \geq E_{\infty} \quad (t \geq t_0).$$

先假定  $E_{\infty} > 0$ , 則必存在原點  $O$  的一個  $\delta_1$  領域, 其中  $E < E_{\infty}$ 。由於對任一解有  $E(t) \geq E_{\infty}$ , 因而所有解都不可能走出  $\delta$  領域和  $\delta_1$  領域邊界間的閉區域 (在圖 45 上此區域以斜綫標出)。設在此區域內函數  $E'$  有負的極大值  $-h$ , 因而對每個解都有  $\frac{dE}{dt} \leq -h < 0$ ,  $E \leq E_0 - h(t - t_0)$ 。由後一不等式得, 在足夠大的  $t$  之下, 將有  $E < 0$ , 但這是不可能的。因而必須  $E_{\infty} = 0$ , 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E = 0. \quad (\text{III})$$

按不等式(I), 等式  $E = 0$  只可能在點  $O$  成立, 於是 by (III) 得, 當  $t \rightarrow \infty$  時由  $\delta_0$  鄰域開始的所有積分曲綫都趨近於坐標原點, 即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

定理證完<sup>①</sup>。

應當注意, 在一般情況 (非平穩的和非週期的情況) 下, 對李亞普諾夫函數還需要加上更強的条件<sup>②</sup>。

我們來指出李亞普諾夫定理的一個特殊情況, 它常被用作簡單穩定性 (非漸近穩定性) 的判定準則。

設函數  $V(x_1, \dots, x_m, t)$  是微分方程組(2)的積分, 即當以方程組(2)的任何解代入其中時, 函數  $V$  變為常數。此時,  $\frac{dV}{dt} = V'(x_1, \dots, x_m, t) \equiv 0$ , 因之, 可以認為函數  $V'$  在點  $x_1 = \dots = x_m = 0$  處, 對於任何  $t$  值, 有極大值或極小值 (當然是非嚴格的)。於是, 由李亞普諾夫定理得如下推論:

**推論.** 若微分方程組(2)有積分  $V(x_1, \dots, x_m, t)$  (在平穩情況下不顯含  $t$ , 在週期情況下對於  $t$  是週期的, 且週期為  $\tau$ ), 且此積

① 譯文 (第 177—178 頁) 中這個定理的證明也是根據作者致 ИММ 的信 (見 § 35 漸近穩定性定理的腳注) 改寫的。——譯者注

② 例如, 見 Четаев Н. Г., Устойчивость движения, т. II. (有中譯本)



分在点  $x_1 = \cdots = x_m = 0$  处, 对于任何固定的  $t$ , 有严格极值, 則組 (2) 的零解稳定。

我們注意, 证明保守系統拉格朗日定理中, 我們曾利用了能量积分  $E$ 。

現在来看由一阶微分方程組

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_1, \cdots, z_m, t) \quad (i = 1, \cdots, m) \quad (10)$$

所描述的运动或更一般的过程; 上式右端是当  $t \geq t_0$  时, 变量  $z_1, \cdots, z_m$  的某个变化区域内的連續函数, 它滿足在給定初始数据  $z_i(t_0)$  ( $i = 1, \cdots, m$ ) 之下的解的存在和唯一性条件。

設  $\tilde{z}_i(t)$  ( $i = 1, \cdots, m$ ) 是方程組 (10) 的解, 它确定了某个过程。为了查明这个过程的稳定性問題, 我們引入新的未知函数——“偏差”

$$x_i = z_i - \tilde{z}_i(t) \quad (i = 1, \cdots, m) \quad (11)$$

代替未知函数  $z_1, \cdots, z_m$ 。于是, 在新变量之下, 微分方程組 (10) 可以写成方程組 (2) 的形式, 其中

$$X_i = Z_i[x_1 + \tilde{z}_1(t), \cdots, x_m + \tilde{z}_m(t)] - Z_i[\tilde{z}_1(t), \cdots, \tilde{z}_m(t)] \quad (12)$$

在新变量中, 与微分方程組 (10) 的解  $z_i = \tilde{z}_i(t)$  ( $i = 1, \cdots, m$ ) 相对应的是微分方程組 (2) 的零解  $x_1 = \cdots = x_m = 0$ 。这表明, 关于过程  $\tilde{z}_i(t)$  ( $i = 1, \cdots, m$ ) 的稳定性問題, 可以归結为我們已經研究过了的、关于微分方程組 (2) 的零解的稳定性問題。換句話說, 如果右端按公式 (12) 确定的偏差方程組 (2) 的零解  $x_1 = \cdots = x_m = 0$  是稳定的 (或漸近稳定的), 則方程組 (10) 的解  $z_i = \tilde{z}_i(t)$  ( $i = 1, \cdots, m$ ) 便称之为稳定的 (或漸近稳定的)。所有这些就为本节所引入的李亚普諾夫定理开辟了广闊的用場。这个定理不仅可用来判定平衡位置的稳定性, 而且也可以用来判定运动的稳定性和由常微分方程組所确定的任何更一般过程的稳定性。

**例題 1.** 我們來看有固定點  $O$  的剛體的慣性運動。在此情況下，歐拉動力學方程有如下形式：

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B-C)qr, & B \frac{dq}{dt} &= (C-A)rp, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A-B)pq. \end{aligned} \quad (13)$$

這裡  $p, q, r$  是角速度  $\omega$  在物體慣性主軸  $O\xi, O\eta, O\zeta$  上的投影； $A, B, C$  是物體對這些軸的轉動慣量。

方程(13)有如下的三個特解：

$$1^\circ \quad q=r=0, \quad p=\text{const}=p_0;$$

$$2^\circ \quad r=p=0, \quad q=\text{const}=q_0;$$

$$3^\circ \quad p=q=0, \quad r=\text{const}=r_0;$$

這些特解決定了物體繞各主軸的永久轉動。

我們只來討論轉動  $1^\circ$  的穩定性，因為，只要換換各軸的標號就可以將  $2^\circ$  和  $3^\circ$  寫成  $1^\circ$  的樣子。同時，歐拉方程(13)的解  $1^\circ$  的穩定性將決定轉動  $1^\circ$  對角速度  $\omega$  的條件穩定性<sup>①</sup>。

令  $x_1 = p - p_0$ ,  $x_2 = q$ ,  $x_3 = r$ ，則偏差方程為

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{B-C}{A} x_2 x_3, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{C-A}{B} x_3 (x_1 + p_0), \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{A-B}{C} x_2 (x_1 + p_0). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

假設慣性橢球的長軸或短軸位於所討論的永久轉動軸  $O\xi$  上。由於量  $A, B, C$  各與慣性橢球軸長平方成反比，這就意味着，或者  $A < B, C$ ，或者  $A > B, C$ 。今取函數

$$V = (Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Ap_0x_1)^2 \pm [B(B-A)x_2^2 + C(C-A)x_3^2]$$

作為李亞普諾夫函數，其中“+”號取在  $A < B, C$  的情況，“-”號取在  $A > B, C$  的情況。

函數  $V$  在  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  處為零，而且在這個點的鄰域內為正，即函數  $V$  在該點有嚴格極小值。另外，不難驗證，按方程(14)計算的導數  $\frac{dV}{dt} = 0$ ，即函數  $V$  是微分方程組(14)的積分。因此，按照李亞普諾夫定理的推論，繞慣性橢球長軸或短軸的永久轉動是穩定的。

① 對  $\omega$  的穩定性是指在全部運動時間內，初始角速度  $\omega_0$  的微小變化將引起矢量  $\omega$  的微小變化。換句話說，也就是對偏差  $x_1 = p - p_0$ ,  $x_2 = q$ ,  $x_3 = r$  的穩定性。

利用契塔也夫不稳定准则①可以证明繞慣性椭球中軸的永久轉动不稳定。

2. 作为一个例子,我們来看关于炮弹旋轉运动的稳定性問題②。

为簡單起见,設炮弹重心  $C$  以不变的速度  $v = \text{const}$  沿水平軸  $x$  作直綫运动。令  $Cxy$  为鉛垂射击面。彈体軸(动力对称軸)  $C\xi$  的位置,由以下两个角来确定:  $C\xi$  軸在  $Cxy$  面上的投影  $Cx_1$  与  $Cx$  間的夹角  $\alpha$  和  $Cx_1$  与  $C\xi$  間的夹角  $\beta$ (图 46)。依次轉以角  $\alpha$  和  $\beta$ , 三面体  $Cxyz$  便轉到三面体  $C\xi\eta\zeta$  的位置。再繞  $C\xi$  軸轉以角  $\varphi$ , 三面体  $C\xi\eta\zeta$  便轉到固連在炮弹上的三面体的位置。因此,炮弹角速度  $\omega$  由三个分量組成:

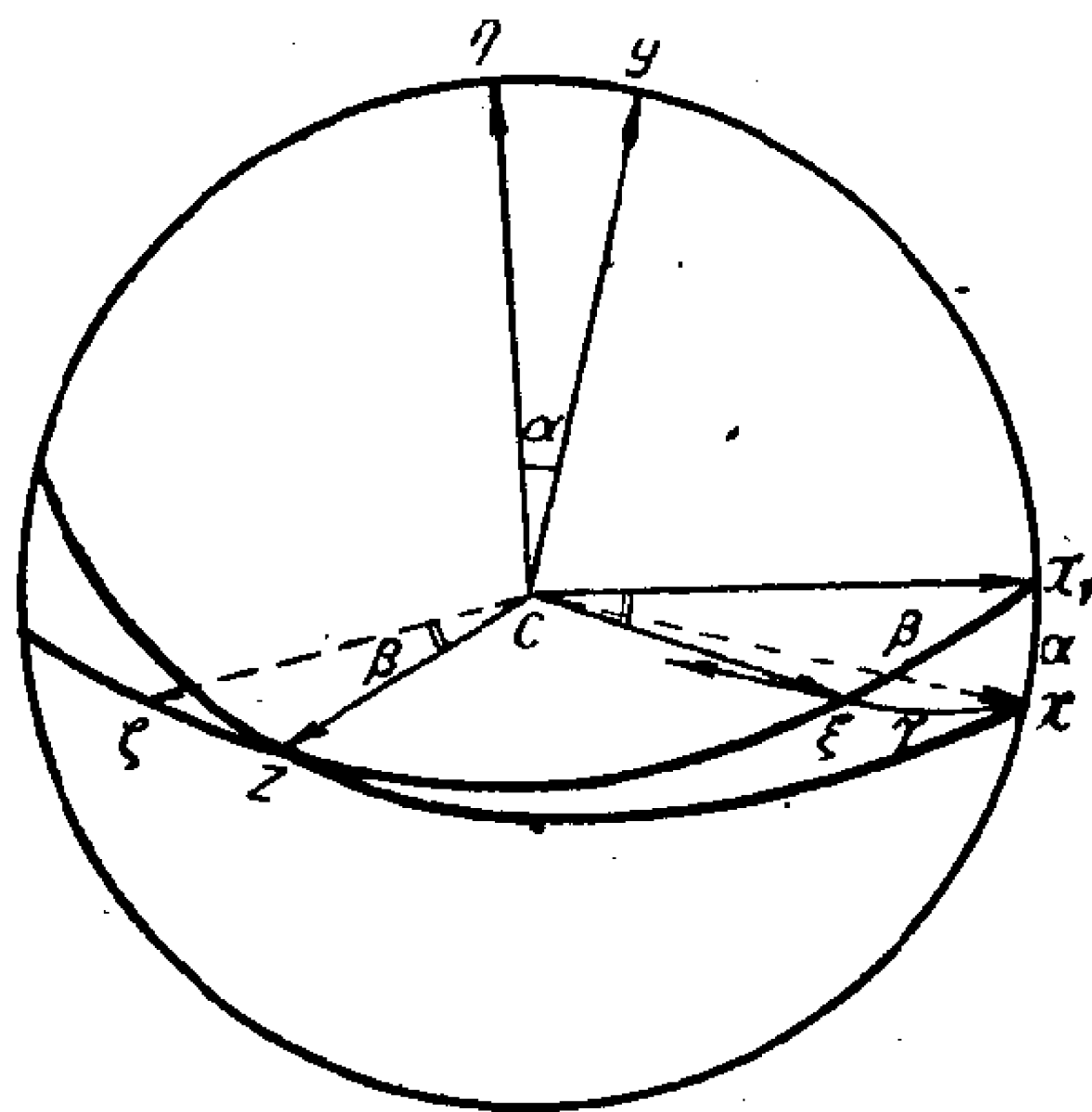


图 46.

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3,$$

其中  $\omega_1 = \dot{\alpha}$ ,  $\omega_2 = \dot{\beta}$ ,  $\omega_3 = \dot{\varphi}$ 。角速度在慣性主軸  $C\xi$ ,  $C\eta$ ,  $C\zeta$  上的投影由下列公式决定:

$$p = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta, \quad q = -\dot{\beta}, \quad r = \dot{\alpha} \cos \beta.$$

令  $A$  表示炮弹的軸轉动慣量,  $B$  为其赤道轉动慣量, 則得动能表达式

$$T = \frac{1}{2} [Ap^2 + B(q^2 + r^2)] = \frac{1}{2} [A(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 + B(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta)].$$

假設除重力而外, 炮弹上还有作用在彈体軸  $D$  点(“压力中心”)的迎面空气阻力  $R$ , 它大小不变③, 方向与速度  $v$  相反, 即沿  $x$  軸的負方向。令  $l = CD$ ,  $\gamma$  表示軸  $Cx$  和  $C\xi$  間的夹角, 則  $R$  对  $C$  点的力矩等于  $Rl \sin \gamma$ , 而力  $R$  的元功为

$$\delta A = Rl \sin \gamma \delta \gamma = -\delta (Rl \cos \gamma).$$

① Четаев Н. Г., Устойчивость движения, 第二版, 1955, 第 37 頁。

② 这个問題的解曾由契塔也夫給出, 发表在 “Прикладная математика и механика”, т. X, вып. 1, 1946。

③  $R$  的大小是  $v$  的函数:  $R = f(v)$ 。因此, 由  $v = \text{const}$  便有  $R = \text{const}$ 。

因此, 可以取函數①

$$\Pi = Rl \cos \gamma = Rl \cos \alpha \cos \beta$$

作為力的勢。

$\alpha$  角和  $\beta$  角的变化刻划出彈體軸的振動特征。為了判定炮彈旋轉運動的穩定性, 我們由以下三個運動積分出發:

$$1) T + \Pi = \text{const}; \quad 2) G_x = \text{const}; \quad 3) G_\xi = Ap = \text{const}.$$

頭一個積分是能量積分。 $G_x$  和  $G_\xi$  是動量矩  $\mathbf{G}_C$  在  $Cx$  軸和  $C\xi$  軸上的投影。 $G_x$  在系統運動時保持不變的性質可由力  $\mathbf{R}$  對  $Cx$  軸之矩為零得出。第三個積分表示對應於循環坐標  $\varphi$  的廣義沖量  $Ap$  不變。由圖 46 可以看出,

$$\begin{aligned} G_x &= G_\xi \cos(x\xi) + G_\eta \cos(x\eta) + G_\zeta \cos(x\zeta) = \\ &= Ap \cos(x\xi) + Bq \cos(x\eta) + Br \cos(x\zeta) = \\ &= Ap \cos \alpha \cos \beta + B(\dot{\beta} \sin \alpha - \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta \sin \beta) \textcircled{2}. \end{aligned}$$

將前兩個積分和第三個積分組合, 利用已經得到的  $T, \Pi, G_x$  的表达式便得到以下的兩個運動積分  $W_1$  和  $W_2$ :

$$W_1 = \frac{1}{2} B(\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) + Rl(\cos \alpha \cos \beta - 1) = \text{const},$$

$W_2 = B(\dot{\beta} \sin \alpha - \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta \sin \beta) + Ap(\cos \alpha \cos \beta - 1) = \text{const}$ , 它們在  $\alpha = \beta = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$  時等於零。

現在來找運動積分的一個定號綫性組合  $W_1 - \lambda W_2$ 。我們先來確定  $W_1$  和  $W_2$  中小量  $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$  的最低次項:

$$W_1 = \frac{1}{2} B(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) - \frac{1}{2} Rl(\alpha^2 + \beta^2) + \dots,$$

$$W_2 = B(\dot{\beta} \alpha - \dot{\alpha} \beta) - \frac{1}{2} Ap(\alpha^2 + \beta^2) + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{此時, } W_1 - \lambda W_2 &= \frac{1}{2} [B\dot{\alpha}^2 + 2B\lambda\dot{\alpha}\beta + (Ap\lambda - Rl)\beta^2] + \\ &+ \frac{1}{2} [B\dot{\beta}^2 - 2B\lambda\dot{\beta}\alpha + (Ap\lambda - Rl)\alpha^2] + \dots \end{aligned}$$

為使上式每一方括弧中的表达式是正定的, 只要滿足不等式

① 在以  $C$  為中心的球面上, 弧  $\alpha, \beta, \gamma$  構成一直角球面三角形,  $\alpha, \beta$  為其“勾股”,  $\gamma$  為其“弦”。對於這樣的三角形, 公式  $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$  成立。公式的正確性可仿效初等幾何的辦法來證明。

② 弧  $\alpha, \frac{\pi}{2} + \beta$  和  $(x\zeta)$  構成一個以  $\alpha$  和  $\frac{\pi}{2} + \beta$  為“勾股”的球面直角三角形。

$$\text{因此, } \cos(v\zeta) = \cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\cos \alpha \sin \beta.$$

$$B^2\lambda^2 < B(Ap\lambda - Rl)$$

就足够了。約去兩端的  $B$ ，經移項後即得：

$$B\lambda^2 - Ap\lambda + Rl < 0.$$

欲使上列不等式對某一實的  $\lambda$  成立，就必須這不等式左端的二次三項式有實根，即如下的不等式應當成立：

$$A^2p^2 > 4BRl.$$

此即保證炮彈旋轉運動（在“偏差” $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$  之下）穩定的條件，因為當滿足此條件時便可得一實數  $\lambda$  使積分  $W_1 - \lambda W_2$  在  $\alpha = \beta = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$  時有嚴格極小值（等於零）。

### § 37. 綫性系統的穩定性

在前一節中曾經指出，對於由常微分方程組<sup>①</sup>所決定的任何過程的穩定性的研究都可以歸結為對偏差方程組零解穩定性的研究。

假設偏差微分方程是綫性的，而且是常系數的：

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \quad (i=1, \dots, n). \quad (1)$$

我們來找該方程如下形式的特解：

$$x_i = u_i e^{\lambda t} \left( i=1, \dots, n; \sum_{i=1}^n |u_i|^2 > 0 \right). \quad (2)$$

將表达式(2)代入方程(1)，約去  $e^{\lambda t}$  即得未知量  $u_i$  和  $\lambda$  之間的关系式

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}u_k = \lambda u_i \quad (i=1, \dots, n), \quad (3)$$

或

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} - \lambda \delta_{ik})u_k = 0 \quad (i=1, \dots, n), \quad (4)$$

式中  $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i=k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$  —— 克朗尼克符号。

① 如所周知，任何這樣的方程組總可以寫成一階微分方程組的形式。

因为在欲求之解(2)中, 常数  $u_i$  至少应当有一个不等于零, 故齐次方程組(4)的系数行列式应等于零:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

这样, 我們便得到了一个关于  $\lambda$  的  $n$  次代数方程, 可用以确定  $\lambda$ 。

方程(5)称为系数矩陣

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的特征方程或长期方程。特征方程的根叫做矩陣  $\mathbf{A}$  的特征数。

取矩陣  $\mathbf{A}$  的任何特征数作为  $\lambda$ , 由綫性方程組(4)便可求得与此特征数相对应的一組常数  $u_i$ 。

为方便計, 往后我們对原方程組(1)和关系式(2)、(3)引入矩陣形式的写法。

在討論中我們引入矢量列

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix}.$$

于是, 等式(1)一(3)和(5)便可以写成①:

① 方陣  $\mathbf{A}$  与列  $\mathbf{x}$  相乘时, 取方陣  $\mathbf{A}$  的第  $i$  行元素与列  $\mathbf{x}$  的对应元素相乘, 并将这些乘积相加。如此所得之和便是乘积列  $\mathbf{Ax}$  的第  $i$  个元素。将列  $\mathbf{x}$  各元素微分即得列的导数  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ 。

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (1')$$

$$x = ue^{\lambda t}, \quad (2')$$

$$Au = \lambda u \quad (u \neq 0), \quad (3')$$

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (5')$$

这里  $E = \|\delta_{ik}\|_{i,k=1}^n$  —— 单位矩陣。

与数  $\lambda$  一同滿足关系式(3')的矢量列  $u \neq 0$  称为矩陣  $A$  的、对应于特征数  $\lambda$  的固有矢量。因此, 在方程組(1')的每組形如(2')式的解中,  $\lambda$  乃是矩陣  $A$  的特征数,  $u$  是与之对应的固有矢量。

我們先来討論特征方程(5)有  $n$  个不同的根  $\lambda_k (k=1, \dots, n)$  的情况。对于每一个特征数  $\lambda_k$  都有固有矢量  $u_k$  和方程組(1)的形如  $u_k e^{\lambda_k t}$  的特解与之对应。这些解的带有任意常系数的綫性組合

$$x = \sum_{k=1}^n C_k u_k e^{\lambda_k t} \quad (6)$$

仍然是方程組(1)的解。

为了证明公式(6)包括了方程組(1)的一切解, 我們先来证明对应于不同特征数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  的矢量列  $u_1, u_2, \dots, u_n$  彼此綫性无关。

假設

$$\sum_{k=1}^n c_k u_k = 0. \quad (7)$$

将等式(7)两端左乘以矩陣  $A$ , 則由等式

$$Au_k = \lambda_k u_k \quad (u_k \neq 0, k=1, \dots, n),$$

便有

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k c_k u_k = 0. \quad (8)$$

由关系式(7)和(8)消去常数  $c_1$ , 得:

$$\sum_{j=2}^n (\lambda_j - \lambda_1) c_j \mathbf{u}_j = 0. \quad (9)$$

再将此式左乘以  $A$ , 并将所得等式与(9)联立消去  $c_2$ , 如此等等, 最后便得到

$$(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \cdots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) c_n \mathbf{u}_n = 0, \quad (10)$$

由此便有  $c_n = 0$ 。因为等式(7)中所有各项都是平等的, 故

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0,$$

即固有矢量  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$  之間不可能存在任何形如(7)式的关系, 因之, 这些矢量綫性无关。

在公式(6)中令  $t=0$ , 得

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{u}_k. \quad (11)$$

任意給定初始矢量  $\mathbf{x}_0$ , 根据矢量  $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$  的綫性无关性, 我們便可以从等式(11)唯一地确定  $C_k (k=1, \cdots, n)$ 。因此, 公式(6)包括方程組(1)滿足任意初始条件  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  的解, 即包括方程組(1)的一切解。

在微分方程理論教程中曾证明在重根情况下, 公式(6)将变得稍为复杂些。此时公式中可能要出現所謂的“长期項”——代替常矢量  $\mathbf{u}_k$  而以  $t$  的多項式  $\mathbf{u}_k + \mathbf{u}'_k t + \cdots$  为因子的項。在一般情况下, 微分方程組(1)的任何解均可由如下公式确定:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n C_k (\mathbf{u}_k + \mathbf{u}'_k t + \cdots) e^{\lambda_k t}. \quad (12)$$

从公式(6)和(12)可以直接得出两个重要的推論。

1°. 若矩陣  $A$  所有的特征数都有負的实部, 即

$$\max_{1 \leq k \leq n} \operatorname{Re} \lambda_k = -\alpha < 0,$$

則  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ , 因之微分方程組(1)的零解是漸近稳定的<sup>①</sup>。

① 数  $\alpha > 0$  有时称为稳定度。



現在假設至少对于某一个  $k$ ,  $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ 。于是, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 方程組(1)有非零解  $\mathbf{x} = C_k \mathbf{u}_k e^{\lambda_k t}$  趋于无穷。同时由于  $C_k$  是任意常数, 初值(当  $t=0$  时)  $\mathbf{x}_0 = C_k \mathbf{u}_k$  可以任意小。故在此情况下, 解  $\mathbf{x}=0$  不稳定。因此, 下面的論断成立:

2°. 即使矩陣  $A$  的一个特征数  $\lambda_k$  有正实部 ( $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ ), 微分方程組(1)的零解也不稳定<sup>①</sup>。

例題. 介质阻力与速度一次方成正比的綫性振子, 其平衡位置是漸近稳定的。其实, (見第 164 頁上的例 3) 如果令  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ , 則运动微分方程  $m\ddot{x} + 2f\dot{x} + cx = 0$  ( $m, c, f > 0$ ) 可以写成两个一阶微分方程的形式:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{c}{m}x_1 - 2\frac{f}{m}x_2.$$

特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{c}{m} & -2\frac{f}{m} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + 2\frac{f}{m}\lambda + \frac{c}{m} = 0$$

的根有負的实部  $-\frac{f}{m}$ 。这就保证了平衡位置的漸近稳定性。

### § 38. 按綫性近似的稳定性

在微分方程組(非綫性的!)

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

中, 将右端部分按偏差  $x_1, \dots, x_n$  之幂展成級数, 得:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + f_i \quad (i=1, \dots, n), \quad (1')$$

其中  $f_i$  是  $X_i$  展开式中, 从  $x_1, \dots, x_n$  的二次項开始的所有各項之和 ( $i=1, \dots, n$ )。

在平稳情况下,  $a_{ik}$  是常系数, 函数  $f_i$  只依赖于  $x_1, \dots, x_n$  而不

<sup>①</sup> 当全体  $\operatorname{Re}\lambda_k \leq 0$  ( $k=1, \dots, n$ ) 时, 即使其中有等号成立, 只要公式(12)所有  $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$  的那些項中无长期項, 則解  $\mathbf{x}=0$  仍然是稳定的。反之, 解  $\mathbf{x}=0$  不稳定。

依賴于 $t$ 。在周期情況下， $a_{ik}$  是  $t$  的周期函數，周期為  $\tau$ ，而非線性項  $f_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t)$  對於  $t$  也是周期的，周期也是  $\tau$ 。

若將方程 (1') 中的所有非線性項  $f_i$  丟掉，則得一線性微分方程組，此線性微分方程組稱為非線性方程組 (1) 的線性近似。

上世紀末，在龐伽雷和李亞普諾夫的研究中，已就平穩情況和周期情況查明，非線性方程組 (1) 零解的穩定性可按其線性近似來判定，即由線性近似的零解的漸近穩定性可以斷定非線性方程組的零解的漸近穩定性①。由於研究線性方程組比研究非線性方程組簡單得多，這一論斷得到了廣泛的應用。

我們僅限於討論平穩情況，同時，為了證明上述論斷，我們將方程組 (1') 寫成矩陣的形式：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1'')$$

這裡  $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^n$  是元素為常數的方陣， $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  是以  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i=1, \dots, n$ ) 為元素的矢量列。按照假定，線性近似的零解漸近穩定，故（見 § 37）矩陣  $\mathbf{A}$  的所有特征數  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  都有負實部：

$$\max_{1 \leq k \leq n} \operatorname{Re} \lambda_k = -\alpha < 0. \quad (2)$$

我們約定以  $|\mathbf{z}|$  表示分量為  $z_1, \dots, z_n$  的矢量列  $\mathbf{z}$  的“長度”：

$$|\mathbf{z}| = \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

由於矢量列  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  的每個元素都從變量的二次項開始，所以

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon |\mathbf{x}|, \quad (4)$$

① 這裡假設右端  $X_i(x_1, \dots, x_n, t)$  是連續函數。目前，對於右端  $X_i$  不連續的情況，線性近似應如何理解已經查明，並就周期情況和某些非周期情況建立了按線性近似判定穩定性的相應準則。見 Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р., Прикладная математика и механика, т. 21, вып. 5, 1955 和 Ливартовский И. В., 同一刊物, т. 23, вып. 3, 1959.

而且只要限制变量  $x_1, \dots, x_n$  在足够小的邻域  $|\mathbf{x}| < \Delta$  之内变化, 式中常数  $\varepsilon > 0$  便可以选得随便多么小。

证明<sup>①</sup>有賴于下述引理:

引理. 利用非奇异綫性变量变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{y} \quad (\det \mathbf{U} \neq 0) \quad (5)$$

可以将綫性微分方程組  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  化为“三角形”的<sup>②</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + b_{12} y_2 + \dots + b_{1n} y_n, \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_2 y_2 + \dots + b_{2n} y_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \lambda_n y_n, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是矩陣  $\mathbf{A}$  的特征数, 而且, 当适当选择变换(5)时, 可使“非对角綫”系数  $b_{ik} (i < k)$  的模变得随便多么小<sup>③</sup>.

对非綫性方程組(1'')施行变换(5)。在新变量中, 方程組(1'')可以写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + b_{12} y_2 + \dots + b_{1n} y_n + g_1(\mathbf{y}), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_2 y_2 + \dots + b_{2n} y_n + g_2(\mathbf{y}), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \lambda_n y_n + g_n(\mathbf{y}), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中以  $g_1(\mathbf{y}), \dots, g_n(\mathbf{y})$  为元素的矢量列  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  由等式

① 見 Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, М., 1952.

② 在变换(5)之下, 系数矩陣  $\mathbf{A}$  被矩陣  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$  所代替, 它是三角形的。

③ 引理的证明将在后面第 190—192 頁上給出。

$$g(y) = U^{-1}f(Uy) \quad (8)$$

確定，它滿足不等式①

$$|g(y)| < \eta |y|, \quad (9)$$

其中數  $\eta$ ，如同數  $\varepsilon$  一樣，也可以取得要多么小就多么小，只要領域  $|x| < \Delta$  (相應的是  $|y| < \Delta_1$ ) 取得足夠小就行。

於是，由方程(7)和不等式(2)和(9)便有②

$$\begin{aligned} |y| \frac{d|y|}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n y_i \bar{y}_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( y_i \frac{d\bar{y}_i}{dt} + \bar{y}_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \lambda_i |y_i|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i < k} (b_{ik} y_k \bar{y}_i + \bar{b}_{ik} \bar{y}_k y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (g_i \bar{y}_i + \bar{g}_i y_i) \leq \\ &\leq (-\alpha + \delta + \eta) |y|^2 \left( \delta = \sum_{i < k} |b_{ik}| \right), \end{aligned}$$

即

$$\frac{d|y|}{dt} \leq (-\alpha + \delta + \eta) |y|,$$

因之，

$$|y| \leq |y_0| e^{(-\alpha + \delta + \eta)(t-t_0)} \quad (y_0 = y(t_0)). \quad (10)$$

我們來這樣選擇正數  $\delta$  和  $\eta$ ，使之滿足不等式  $\alpha - \delta > 0$  和  $\eta < \alpha - \delta$ 。於是，由不等式(10)得：

① 若定義矩陣  $A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^n$  的范數為  $\|A\| = \left( \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ，則不難驗證如下的不等式是對的：

$$|Ax| \leq \|A\| |x|.$$

因此，由不等式(4)和等式(8)便可斷定

$$|g(y)| \leq \|U^{-1}\| |f(Uy)| \leq \varepsilon \|U^{-1}\| \|U\| |y|,$$

因之，在不等式(9)中，可以令

$$\eta = \|U\| \|U^{-1}\| \varepsilon.$$

②  $\bar{y}_k$  表示  $y_k (k=1, \dots, n)$  的共軛複數。

$$|y| \leq |y_0| \text{ 和 } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad (11)$$

即方程组(7)的解  $y=0$  渐近稳定。但矢量  $x$  和  $y$  以线性变换(5)相互联系,故方程组(1)的解  $x=0$  也渐近稳定<sup>①</sup>。

**引理的证明.** 我们先来证明利用形式如(5)的变换  $x=U^{(1)}z$  可以将微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (12)$$

化为这样的形式: 1) 从第二个方程以后的各方程右端都不包含第一个变量  $z_1$ , 2) 在第一个方程中,  $z_1$  的系数等于矩阵  $A$  的特征数  $\lambda_1$ , 即如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + b'_{12} z_2 + \cdots + b'_{1n} z_n, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \quad \quad b'_{22} z_2 + \cdots + b'_{2n} z_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dz_n}{dt} &= \quad \quad b'_{n2} z_2 + \cdots + b'_{nn} z_n. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

为此, 只要取对应于特征数  $\lambda_1$  的固有矢量  $u_1$  ( $Au_1 = \lambda_1 u_1$ ,  $u_1 \neq 0$ ) 作为矩阵  $U^{(1)}$  的第一列, 而取与  $u_1$  线性无关的矢量  $u_2, \dots, u_n$  作为  $U^{(1)}$  的其余各列(此时  $\det U^{(1)} \neq 0$ )就行了。

事实上, 变换  $x=U^{(1)}z$  可以写成

$$x = u_1 z_1 + u_2 z_2 + \cdots + u_n z_n, \quad (14)$$

其中  $z_1, \dots, z_n$  是矢量  $x$  在基底  $u_1, u_2, \dots, u_n$  中的坐标。方程组(12)有解

$$x = u_1 e^{\lambda_1 t}. \quad (15)$$

因此, 根据等式(14), 变换后的微分方程组

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{k=1}^n b'_{ik} z_k \quad (i=1, \dots, n) \quad (16)$$

有如下的解:

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = \cdots = z_n = 0, \quad (15')$$

但这只有当  $b'_{11} = \lambda_1$ ,  $b'_{21} = \cdots = b'_{n1} = 0$ , 即方程组(16)具有(13)的形式时才是可能的。

① 根据前页的脚注1), 由等式(5)可得如下不等式:

$$|x| \leq \|U\| |y| \leq \|U\| |y_0| \leq \|U\| \|U^{-1}\| |x_0|.$$

由于在非奇異綫性變換之下，矩陣  $\mathbf{A}$  的特徵方程不變<sup>①</sup>，故矩陣  $\|b'_{jk}\|_2^n$  的特徵數就是矩陣  $\mathbf{A}$  其餘的  $n-1$  個特徵數  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

將類似的變換用於(13)的後  $n-1$  個方程，如此繼續下去，最後便將原微分方程組借非奇異綫性變換化為了如下形式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + b'_{12} z_2 + \dots + b'_{1n} z_n, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \lambda_2 z_2 + \dots + b'_{2n} z_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dz_n}{dt} &= \lambda_n z_n. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

末了，再作最後一次變量變換：

$$z_k = \mu^k y_k \quad (\mu > 0; \quad k = 1, \dots, n),$$

方程組(17)便化為方程組(6)了，而且只要數  $\mu > 0$  取得足夠小，它的非對角綫係數  $b_{ik} = \mu^{k-i} b'_{ik} (i < k)$  的模便可以要麼小就有多麼小。引理證畢。

### § 39. 漸近穩定性準則

在前兩節中已經證明，在平穩情況下，任意的(非綫性的)偏差微分方程組，當其綫性近似係數矩陣的特徵方程所有的根都有負實部時，零解是漸近穩定的。因此，判定實係數代數方程

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (a_0 > 0) \quad (1)$$

所有的根都有負實部的必要充分條件有很大的實際意義。

今以  $\lambda_k (k = 1, \dots, g)$  表示方程(1)的實根， $r_j \pm is_j (j = 1, \dots, \frac{n-g}{2})$  表示方程(1)的複根，並假設在複平面上，這些根全都位於虛

① 矩陣  $\mathbf{A}$  和矩陣  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$  (見第 189 頁的上腳注②) 的特徵方程是相同的。這是因為

$$\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \lambda \mathbf{E},$$

所以

$$\det(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \lambda \mathbf{E}) = \det \mathbf{U}^{-1} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \det \mathbf{U} = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$$

( $\mathbf{E}$  是單位矩陣)。

軸左側, 即

$$\lambda_k < 0, r_j < 0 \left( k=1, \dots, g; j=1, \dots, \frac{n-g}{2} \right). \quad (2)$$

于是,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= a_0 \prod_{k=1}^g (\lambda - \lambda_k) \prod_{j=1}^{\frac{n-g}{2}} (\lambda - r_j - i s_j)(\lambda - r_j + i s_j) = \\ &= a_0 \prod_{k=1}^g (\lambda - \lambda_k) \prod_{j=1}^{\frac{n-g}{2}} (\lambda^2 - 2r_j \lambda + r_j^2 + s_j^2). \end{aligned} \quad (3)$$

根据不等式(2), 等式(3)最后部分的每个因子都有正的系数, 故方程(1)的系数全是正的。因之, 为使方程(1)的根全都位于虚軸左側, 所有系数均为(在  $a_0 > 0$  时)正是必須的, 但并不充分。

早在 1875 年, 著名的英国力学家罗司曾给出了一个算法, 利用这个算法, 根据多项式  $f(\lambda)$  的系数就可以知道它是否“稳定”, 即这多项式所有的根是否都有負实部。1895 年, 德国数学家霍尔維茨借行列式(“霍尔維茨行列式”)組

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & \bar{a}_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (4)$$

(这里处处假設当  $p > n$  时  $a_p = 0$ ), 以不同的形式与罗司独立地建立了同样的准则。

**罗司-霍尔維茨条件<sup>①</sup>.** 为使方程(1)所有的根都有負实部,

① 关于罗司-霍尔維茨条件的推导, 可以参看, 例如, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, IV 章, § 6; Айзерман М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, 第 2 版, III 章, § 1. ——这两本书都有中譯本。

必須且只須下列不等式成立:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (5)$$

若以數字給出方程(1)的係數, 條件(5)尚易驗證。但若方程(1)的係數包含某些用字母表示的參數時, 在較大的 $k$ 之下, 計算 $\Delta_k$ 就有一定的困難。

因此, 由法國數學家列納爾和希巴爾於1914年所建立的另一些條件是有意義的。在這些條件中, 行列式型不等式比在羅司-霍爾維茨條件中約少一半。

列納爾-希巴爾條件。为使多項式

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

在 $a_0 > 0$ 時所有的根都有負實部, 必須且只須

1) 多項式 $f(\lambda)$ 的係數全都是正的:

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0; \quad (6)$$

2) 下列行列式型不等式成立:

$$\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \dots \quad (7)$$

(這裡和前面一樣,  $\Delta_k$ 表示 $k$ 階霍爾維茨行列式<sup>①</sup>)。

現在我們來介紹一個穩定性的幾何准則。

在等式<sup>②</sup>

$$f(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k)$$

中以 $i\omega$ 代替 $\lambda$ , 並令 $\omega$ 從 $-\infty$ 變到 $+\infty$ , 則幅角 $\theta = \arg f(i\omega)$ 的相應增量

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \theta(\omega) = \sum_{k=1}^n \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg(i\omega - \lambda_k).$$

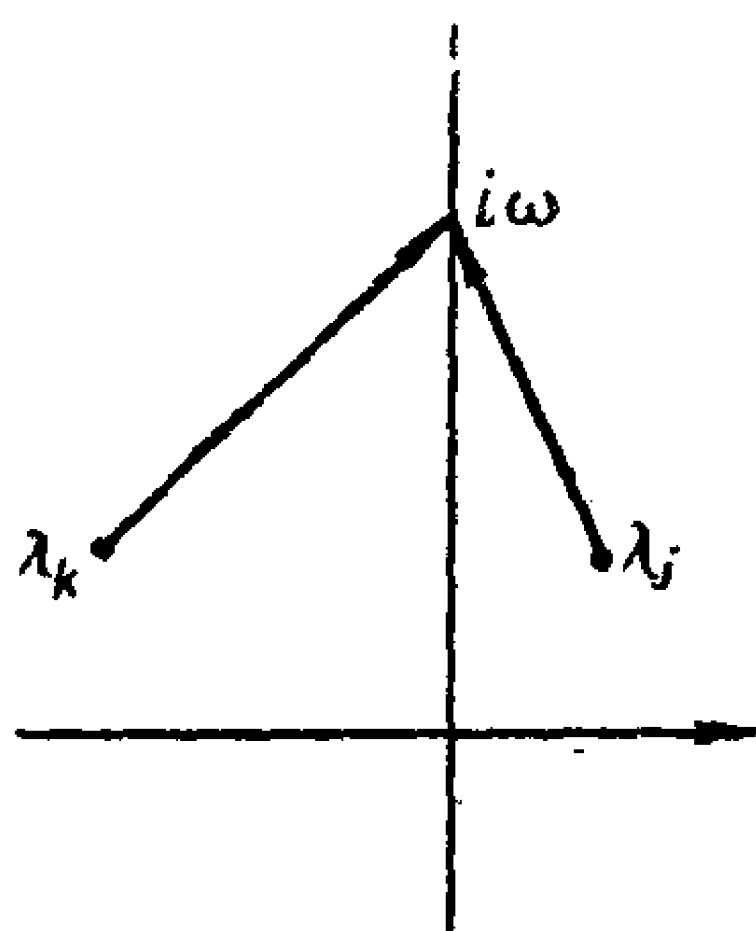


圖 47.

① 列納爾-希巴爾條件的推导, 以及這些條件的某些變相形式均可在前曾引用過的“矩陣論”一書第IV章, §3找到。

② 這裡, 我們以 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 表示多項式 $f(\lambda)$ 的 $n$ 個根。



我們注意<sup>①</sup>(图 47),

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg(i\omega - \lambda_k) = \begin{cases} \pi, & \text{如果 } \operatorname{Re} \lambda_k < 0, \\ -\pi, & \text{如果 } \operatorname{Re} \lambda_k > 0. \end{cases}$$

因此, 当以  $l$  和  $r$  分别表示位于虚轴 ( $l+r=n$ ) 左右两侧的根的个数时, 便有:

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \theta(\omega) = (l-r)\pi.$$

现在来考查当  $\omega$  由  $-\infty$  变到  $+\infty$  时, 复数  $f(i\omega)$  的附标<sup>②</sup> 所描绘的曲线。这条曲线可以分成两支: 在一支上  $\omega > 0$ , 在另一支上  $\omega < 0$ 。由于  $f(i\omega)$  和  $f(-i\omega)$  是复共轭数, 故借对实轴的镜反射便可由其一支得另一支。因此, 若以  $\Delta_0^\infty$  表示当  $\omega$  由 0 变到  $\infty$  时的增量, 则得:

$$\Delta_0^\infty \theta(\omega) = \frac{1}{2} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \theta(\omega) = (l-r) \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

由此可见, 当

$$\Delta_0^\infty \theta(\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

时, 所有的根将位于虚轴左侧 ( $l=n, r=0$ )。

稳定性的几何准则<sup>③</sup>。为使多项式  $f(\lambda)$  是稳定的, 即其所有的根全位于虚轴左侧, 则必须且只须:

1) 当  $\omega$  由 0 变到  $+\infty$  时  $f(i\omega)$  的速端曲线 (简称端图) 不通过零点<sup>④</sup>;

2) 对此端图,

$$\Delta\theta = n \frac{\pi}{2},$$

① 这里我们假设, 在根  $\lambda_k$  中, 没有任何一个根位于虚轴上。

② 在复平面上, 与复数  $z$  对应的点称为复数  $z$  的附标 (аффикс)。

③ 这个准则最先被米哈依洛夫用于自动调节系统的研究中。因此, 在技术文献里, 稳定性几何准则常称之为米哈依洛夫准则 (判据)。

④ 条件 1) 意味着  $f(\lambda)$  没有纯虚根。

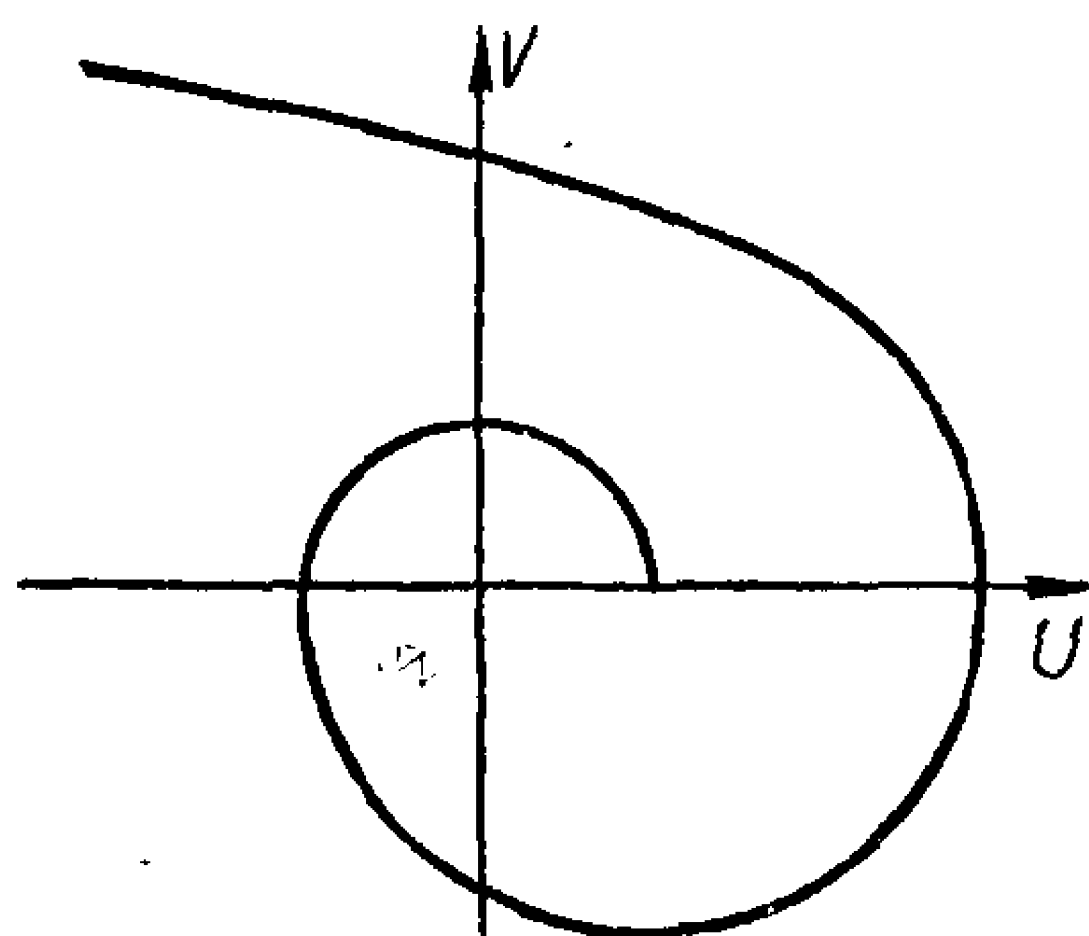


图 48.

其中  $n$  是多項式  $f(\lambda)$  的次數(見圖 48, 這是  $n=6$  的情況)。

應當注意, 對於穩定多項式<sup>①</sup>, 當  $\omega$  由 0 變到  $+\infty$  時, 幅角  $\theta$  將單調改變。這可由公式

$$\theta(\omega) = \sum_{k=1}^n \arg(i\omega - \lambda_k)$$

看出, 因為這樣的多項式, 其右端每一項都是  $\omega$  的單調遞增函數。

**例題.** 設  $f(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 2$ , 則  $f(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$ , 其中

$$U(\omega) = 5\omega^4 - 11\omega^2 + 2, \quad V(\omega) = \omega(\omega^4 - 10\omega^2 + 7).$$

為了作出  $f(i\omega)$  的端圖, 我們注意,  $U(0) = 2$ , 而且當  $\omega = 0$  和  $\omega = \omega_1, \omega = \omega_2$  ( $0 < \omega_1 < \omega_2$ ) 時,  $V(\omega)$  變為零; 平方項  $\omega_1^2$  和  $\omega_2^2$  由二次方程決定:

$$\omega_1^2 = 5 - \sqrt{18} \approx 0.76; \quad \omega_2^2 = 5 + \sqrt{18} \approx 9.24.$$

不難驗證,  $U(\omega_1) < 0, U(\omega_2) > 0$ 。此外,  $V'(0) = 7 > 0$ 。

因此, 當  $\omega = 0$  時, 端圖由正實軸開始, 先向上走, 穿過正虛軸而後又穿過負實軸(當  $\omega = \omega_1$  時)、負虛軸, 最後仍回到正實軸(當  $\omega = \omega_2$  時)。因為  $n = 5$ , 故當  $\omega > \omega_2$  之後, 端圖便不再穿過坐標軸, 而於第一象限內( $U > 0, V > 0$ )走向無窮遠。同時, 當  $\omega \rightarrow +\infty$  時,  $\operatorname{tg} \theta = \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \rightarrow +\infty$ 。因此,

$$\Delta \theta = 5 \frac{\pi}{2},$$

即  $f(\lambda)$  是穩定多項式。

由於  $f(\lambda)$  的係數全是正的, 而且

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 7 \end{vmatrix} > 0,$$

故由列納爾-希巴爾準則出發, 也可以得到同樣的結論。

① 穩定多項式也叫做霍爾維茨多項式。

## 第六章 微振动

### § 40. 保守系统的微振动

如果取平稳系统在初始时刻的位置充分靠近它的稳定平衡位置, 而且初始速度的绝对值也很小, 则在整个运动过程中, 无论是离开平衡位置的偏差还是广义速度, 按其绝对值也都将非常小。这种情况, 就使得我们可以在运动微分方程中仅保留偏差和速度的线性项, 而将其高阶小项丢掉。于是, 运动微分方程便成为线性的, 即问题被“线性化”了。这一节我们将讨论保守系统运动方程的线性化问题。

$n$  自由度保守系统的动能和势能可以通过独立坐标  $q_i$  和广义速度  $\dot{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 写成如下形式:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad \Pi = \Pi(q_1, \dots, q_n). \quad (1)$$

仿照前一章那样, 将坐标原点  $q_1 = \dots = q_n = 0$  取在平衡位置上, 并在此位置令  $\Pi = 0$ 。将系数  $a_{ik}(q_1, \dots, q_n)$  按坐标的幂展成级数:

$$a_{ik}(q_1, \dots, q_n) = a_{ik} + \dots \quad (i, k=1, \dots, n), \quad (2)$$

式中  $a_{ik} = a_{ik}(0, \dots, 0)$  ( $a_{ik} = a_{ki}$ ;  $i, k=1, \dots, n$ ) 是常数。将系数的这些表达式代入动能公式(1), 则得:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + (**), \quad (3)$$

其中(\*\*)表示  $q_i$  和  $\dot{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的三次及更高次项的和。

将势能也按坐标的幂展成级数:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 q_i q_k + (**).$$

前已約定:  $\Pi_0 = 0$ 。此外, 在平衡位置广义力等于零:

$$Q_i^0 = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

因此, 若引入記号

$$c_{ik} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 \quad (c_{ik} = c_{ki}; \quad i, k = 1, \dots, n), \quad (4)$$

則势能便可以写成如下形式:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k + (**). \quad (5)$$

在公式(3)和(5)中, 丢掉  $q_i$  和  $\dot{q}_k$  的三次及更高次小項, 則动能和势能便可以写成常系数二次型的形式:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k, \quad (6)$$

其中  $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $c_{ik} = c_{ki}$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ).

由动能的物理意义可知, 恒有  $T \geq 0$ 。由于我們假設平衡位置不是奇点<sup>①</sup>, 所以只要不是所有的广义速度同时为零, 便永远有

$T > 0$ , 即二次型  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T$  是正定的:

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k > 0 \quad \left( \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 > 0 \right). \quad (7)$$

其次, 为了保证平衡位置的稳定性, 根据拉格朗日定理, 就要求势能在平衡位置有严格极小值。由于  $\Pi_0 = 0$ , 这就意味着在坐标原点的某邻域內,

① 見第40頁的脚注。

$$\sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k > 0 \quad \left( \sum_{i=1}^n q_i^2 > 0 \right). \quad (8)$$

但二次型(8)乃是坐标的二次齐次函数。因之，不等式(8)将在除坐标原点而外的整个空间处处成立，而在坐标原点此二次型为零。换句话说，势能也可以写成坐标的正定二次型<sup>①</sup>。

我们从  $T$  和  $\Pi$  的表达式(6)出发来建立拉格朗日方程，得：

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (9)$$

现在来找这个线性微分方程组如下形式的特解：

$$q_i = u_i \sin(\omega t + \alpha) \quad (i=1, \dots, n), \quad (10)$$

即对于所有的坐标有同一个频率  $\omega$  和同一个常数  $\alpha$  的谐振动。

将  $q_i$  的表达式(10)代入微分方程组(9)，并令

$$\lambda = \omega^2, \quad (11)$$

则当约去  $\sin(\omega t + \alpha)$  之后，我们便得到一组代数方程，它关于振幅  $u_i$ <sup>②</sup> 是线性的：

$$\sum_{k=1}^n (c_{ik} - \lambda a_{ik}) u_k = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (12)$$

因为待求振动的所有振幅  $u_i$  不应全为零，故齐次方程(12)的系数行列式必须等于零：

① 当然，也可能出现这样的情况：函数  $\Pi(q_1, \dots, q_n)$  在略去(· ·)项之前，在坐标原点有严格极小值，而在略去这些项之后，在点有非严格极小值（例如， $\Pi = c^2(q_1 + \dots + q_n)^2 + d^2(q_1^4 + \dots + q_n^4)$ ， $c > 0$ ， $d > 0$ ）。但是，我们认为这是特殊情况，不在考虑之列。在这种特殊情况下，略去  $\Pi$  中的(· ·)项是不行的。这样做的结果将使运动图象变得面目全非。

② 虽然实际上振幅是指绝对值  $|u_i|$ ，但这里我们就将  $u_i$  叫作关于坐标  $q_i$  的谐振动(10)的振幅；而谐振动(10)(当  $t=0$  时)的初相位，当  $u_i > 0$  时是  $\alpha$ ，当  $u_i < 0$  时是  $-\alpha$ 。

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda a_{11} & c_{12} - \lambda a_{12} & \cdots & c_{1n} - \lambda a_{1n} \\ c_{21} - \lambda a_{21} & c_{22} - \lambda a_{22} & \cdots & c_{2n} - \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} - \lambda a_{n1} & c_{n2} - \lambda a_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

展开行列式之后,在左端就得到一个关于  $\lambda$  的  $n$  次多项式。因此,所求的谐和解 (10) 的频率平方  $\lambda = \omega^2$  应满足  $n$  次代数方程 (13)。方程 (13) 称为长期方程或频率方程。

对于方程 (13) 的每一个根,都有微分方程组 (9) (包含一任意常数  $\alpha$ ) 的一组特解 (10) 与之对应。在此特解中  $\omega = \sqrt{\lambda}$ 。

现在将前面所导出的公式写成矩阵形式。为此,引入两个对称的正定矩阵<sup>①</sup>

$$\mathbf{A} = \|a_{ik}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \|c_{ik}\| = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (14)$$

和矢量列

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix} \quad (15)$$

( $\mathbf{u}$  是振幅矢量)。于是,微分方程组 (9) 可写成如下形式

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0. \quad (16)$$

特解 (10) 可写成

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} \sin(\omega t + \alpha). \quad (17)$$

将解 (17) 代入方程 (16) 而得到的代数方程组 (12) 有如下形式:

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{u} = 0 \quad (\lambda = \omega^2). \quad (18)$$

频率方程可以写作:

---

① 如果与对称矩阵  $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|_1^n$  相对应的二次型  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} q_i q_k$  是正定的, 则称矩阵  $\mathbf{A}$  为正定的。

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) = 0 \quad (\lambda = \omega^2). \quad (19)$$

为了证明长期方程(19)的根永远是正实数, 我们先来考察实系数二次型的若干性质。

每个二次型  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_i u_k$  都和一个双线性型  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_i v_k$  相对

应。对此双线性型, 引入如下的简写记号:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_i v_k.$$

这样, 二次型本身便可写作

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_i u_k.$$

不难验证双线性型的以下性质:

$$1^\circ. \quad A(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + A(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}).$$

$$2^\circ. \quad A(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\lambda \text{ 是纯量}).$$

$$3^\circ. \quad A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \text{ ①}.$$

还可以证明, 对于任何复矢量  $\mathbf{u}$ ,

$$4^\circ. \quad A(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \text{ 是实数 ②}.$$

事实上, 若令  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$  ( $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{w}$  都是实的矢量列), 则根据  $1^\circ - 3^\circ$ , 便有

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) &= A(\mathbf{v} + i\mathbf{w}, \mathbf{v} - i\mathbf{w}) = \\ &= A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - iA(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + iA(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + A(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \\ &= A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + A(\mathbf{w}, \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (20)$$

上式最后的表达式显然是实的。

① 和等式  $1^\circ$ 、 $2^\circ$  不同, 等式  $3^\circ$  只是对于具有对称系数矩阵的双线性型才是正确的。

② 在字母上划一横线, 表示取其复共轭量。性质  $4^\circ$  仅对实元素对称矩阵是正确的。

由等式(20)还可推知

5°. 若  $A(u, u)$  是一个正定二次型, 而  $u \neq 0$  是任意的复矢量, 则

$$A(u, \bar{u}) > 0 \quad (u \neq 0). \quad (21)$$

事实上, 若令  $u = v + iw$ , 则有  $A(v, v) \geq 0$ ,  $A(w, w) \geq 0$ . 由  $u \neq 0$  可知不等式  $v \neq 0$  和  $w \neq 0$  中至少有一个成立, 因而关系式  $A(v, v) \geq 0$  和  $A(w, w) \geq 0$  中有  $>$  号成立. 于是由等式(20)便得到不等式(21).

现在来证明

6°. 若  $\lambda$  是长期方程  $\det(C - \lambda A) = 0$  的根,  $u$  是对应的振幅矢量[见(18)]:

$$Cu = \lambda Au \quad (u \neq 0), \quad (22)$$

则对于任意的矢量  $v$ , 有

$$C(u, v) = \lambda A(u, v). \quad (23)$$

事实上, 等式(22)的纯量写法为

$$\sum_{k=1}^n c_{ik} u_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik} u_k \quad (i = 1, \dots, n). \quad (22')$$

今以  $v_i$  乘(22')式第  $i$  个方程的两端, 并按  $i$  求和, 则得:

$$\sum_{i,k=1}^n c_{ik} v_i u_k = \lambda \sum_{i,k=1}^n a_{ik} v_i u_k,$$

即等式(23).

现在来证明, 与长期方程二不同根  $\lambda$  和  $\lambda'$  ( $\lambda \neq \lambda'$ ) 相对应的任意二振幅矢量  $u$  和  $u'$  满足关系式<sup>①</sup>

① 若在  $n$  维空间中引入度量  $A$ , 即将二次型

$$A(u, u) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_i u_k$$

的值理解作矢量  $u$  的长度平方, 则  $A(u, u')$  便是矢量  $u'$  和  $u$  在此度量下的“数量积”. 因此等式(24)表示出振幅矢量的如下性质: 与长期方程不同的根相对应的振幅矢量在度量  $A$  之下永远是相互正交的。



$$A(u, u') = 0. \quad (24)$$

事实上, 根据 6°, 如下的两个等式成立:

$$C(u, u') = \lambda A(u, u'), \quad C(u, u') = \lambda' A(u, u'). \quad (25)$$

但  $\lambda \neq \lambda'$ 。故由等式(25)得关系式(24)①。

现在来证明, 由矩阵  $A$  和  $C$  的对称性以及矩阵  $A$  的正定性, 可以断定长期方程(13)[或(19)]仅有实根。

事实上, 假设  $\lambda$  是长期方程的一个根, 且对应的复矢量  $u \neq 0$ 。于是  $\bar{\lambda}$  也是长期方程的根, 对应的振幅矢量为  $\bar{u}$ 。由于  $\lambda \neq \bar{\lambda}$ , 则如前所证,  $A(u, \bar{u}) = 0$ , 和不等式(21)矛盾。

若  $\lambda$  是实的, 则对应振幅矢量  $u \neq 0$  也可以取成实的。于是, 当令(23)中的  $v = u$  时, 并注意到  $A(u, u) > 0$ , 便有

$$\lambda = \frac{C(u, u)}{A(u, u)}. \quad (26)$$

但在我們所討論的情况下, 二次型  $C(u, u) = \sum_{i, k=1}^n c_{ik} u_i u_k$  也是正定的。

于是, 不仅  $A(u, u) > 0$ , 还有  $C(u, u) > 0$ 。因之,  $\lambda > 0$ 。

因此, 长期方程(13)有  $n$  个正根  $\lambda_j$ , 和它相对应的是实的正频率  $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$  和实的振幅矢量  $u_j (j=1, \dots, n)$ 。

我们先来考察当长期方程所有的根互不相同时的情况。与每个  $\lambda_j$  相对应的是振幅矢量为  $u_j$  的特解

$$q = u_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \quad (\omega_j = \sqrt{\lambda_j}), \quad (27)$$

而矢量  $u_j$  的坐标  $u_{1j}, \dots, u_{nj}$  应满足线性方程组

$$\sum_{k=1}^n (c_{ik} - \lambda_j a_{ik}) u_{kj} = 0 \quad (i=1, \dots, n), \quad (28)$$

或矩阵形式的方程

---

① 由等式(25)可知, 在等式  $A(u, u') = 0$  成立的同时, 等式  $C(u, u') = 0$  也成立。

$$(\mathbf{C} - \lambda_j \mathbf{A}) \mathbf{u}_j = 0. \quad (29)$$

因为微分方程组(9)[或(16)]是线性的,故解(27)的常系数线性组合仍然是该方程组的解。因此,在任意常数  $C_j, \alpha_j (j=1, \dots, n)$  之下,

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \quad (\omega_j = \sqrt{\lambda_j}; \quad j=1, \dots, n) \quad (30)$$

是方程组(9)或(16)的解。我们来证明公式(30)包括系统的所有运动。

首先证明  $n$  个振幅矢量  $\mathbf{u}_j (j=1, \dots, n)$  线性无关<sup>①</sup>。事实上,假设

$$\sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j = 0.$$

那末对于任何固定的  $k (1 \leq k \leq n)$ , 便有

$$0 = A\left(\mathbf{u}_k, \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j\right) = \sum_{j=1}^n c_j A(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j). \quad (31)$$

但当  $k \neq j$  时,  $A(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j) = 0$ , 当  $k = j$  时,  $A(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j) > 0$ 。因之,由等式(31)便有

$$c_k = 0 \quad (k=1, \dots, n),$$

即矢量  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  不可能线性相关。

现在来选择公式(30)中的任意常数  $C_j$  和  $\alpha_j$  使之满足预先给定的任何初始条件

$$q_i(0) = q_{i0}, \quad \dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0} \quad (i=1, \dots, n), \quad (32)$$

或按矩阵形式写成

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (33)$$

由公式(30)得:

① 对于  $\mathbf{A}$  是单位矩阵的特殊情况, 这个论断曾在 § 37 中证明过。

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \sum_{j=1}^n C_j \sin \alpha_j u_j, \\ \dot{q}_0 &= \sum_{j=1}^n \omega_j C_j \cos \alpha_j u_j. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

根据矢量  $u_j (j=1, \dots, n)$  的线性无关性, 由此即可唯一地确定乘积  $C_j \sin \alpha_j$  和  $\omega_j C_j \cos \alpha_j$ ; 又因为  $\omega_j \neq 0$ , 故任意常数  $C_j$  和  $\alpha_j (j=1, \dots, n)$  的值也被唯一确定<sup>①</sup>。

因此, 在长期方程无重根的情况下, 公式(30)包括了系统的所有振动<sup>②</sup>。

若频率方程有重根, 则仍然可以断定, 在任何  $m$  (频率方程不同的根  $\lambda_j$  的个数) 的情况下, 仍有形式如  $u \sin(\omega t + \alpha)$  的解。

拉格朗日曾经认为, 在重频率的情况下, 方程组(9)的通解不再有(30)的形式, 在公式(30)的右端将有如下形式的所谓长期项出现:

$$(u + u' t + u'' t^2 + \dots) \sin(\omega t + \alpha).$$

但是拉格朗日弄错了。正如后来维尔斯特拉斯所证明的那样, 对于每个  $p$  重根  $\lambda_j$ , 线性方程组(12)恰好有  $p$  个线性无关解与之对应, 即对于每个  $p$  重根  $\lambda_j$ , 都可以得到  $p$  个线性无关的振幅矢量。因此, 即使有重频率, 也有  $n$  个线性无关的振幅矢量存在, 借这些振幅矢量所构成的公式(30)便给出在此情况下的通解。

振动

$$q = C_j u_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \quad (j=1, \dots, n) \quad (35)$$

称为系统的主振动, 由主振动可以构成系统的任何振动。

①  $\alpha_j$  可确定到相差一常数项的精确程度, 这个常数项等于  $2\pi$  的整数倍。

② 振幅矢量  $u_j$  满足关系

$$A(u_j, u_h) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{ij} u_{kh} = 0 \quad (j \neq h; j, h=1, \dots, n).$$

在一般情况下(即包括存在重频率的情况), 公式(30)的严格推导可借下节所谓的“简正坐标”方法给出。在这个推导中, 长期方程的重根不再表现出任何特殊性。

**例题. 耦合摆。**质量为  $m$ , 长为  $l$  的两个相同的数学摆, 其悬挂点位于同一水平线上。在摆上离悬挂点为  $h$  ( $0 \leq h \leq l$ ) 的地方, 用弹簧将两个摆联结起来。当两个摆都在铅直位置时, 弹簧处于自由状态。求此系统在铅直平面内的振动。

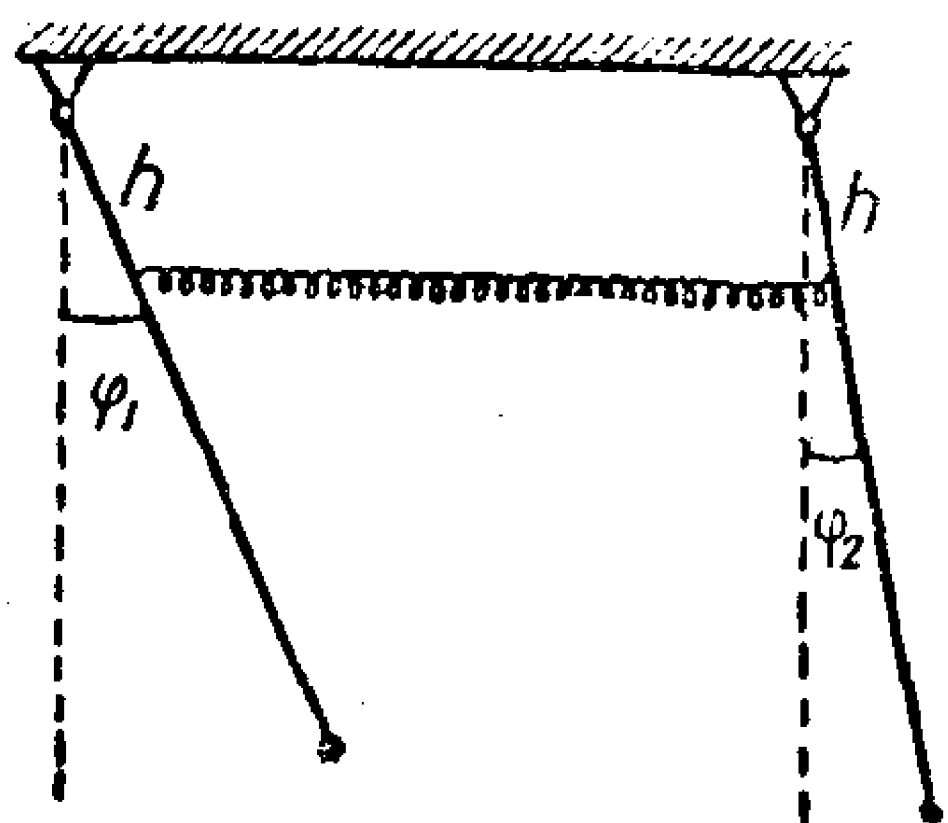


图 49.

我们取摆与铅直线之间的夹角  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  作独立坐标(图 49)。在平衡位置,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ 。略去高阶小量, 弹簧的伸长  $h|\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1| \approx h|\varphi_2 - \varphi_1|$ 。因此, 在所给的情况下,

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

$$\begin{aligned} \Pi &= mgl(1 - \cos \varphi_1) + mgl(1 - \cos \varphi_2) + \frac{\gamma h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} mgl (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2} \gamma h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \dots \end{aligned}$$

若在  $\Pi$  中只保留平方项, 最后便有:

$$T = \frac{1}{2} a (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - b \varphi_1 \varphi_2,$$

其中

$$a = ml^2, \quad c = mgl + \gamma h^2, \quad b = \gamma h^2.$$

频率方程为:

$$\begin{vmatrix} c - \lambda a & -b \\ -b & c - \lambda a \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda = \omega^2);$$

确定主振动振幅的两个方程(这两个方程不独立)中的一个为:

$$(c - \lambda a)u_1 - bu_2 = 0, \quad \text{即} \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{b}{c - \lambda a}.$$

由频率方程得:

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = \frac{c - b}{a} = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \lambda_2 = \frac{c + b}{a} = \frac{g}{l} + 2 \frac{\gamma}{m} \frac{h^2}{l^2}.$$

对于第一主振动,  $u_1 = u_2 = C_1$ , 即

$$\varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad (\varphi_1 = \varphi_2),$$

对于第二主振动,  $u_1 = -u_2 = C_2$ , 即

$$\varphi_1 = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \varphi_2 = -C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (\varphi_1 = -\varphi_2).$$

在第一主振动中, 两个摆的相位总是相同的, 彈簧沒有伸縮, 两个摆相互之間沒有任何影响。在第二主振动中, 两个摆的相位永远相反。

将二主振动叠加可得任何振动:

$$\varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

## § 41. 簡正坐标

### 两个二次型

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q_i q_k \text{ 和 } C(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k \quad (1)$$

中, 如果至少有一个是正定的, 例如  $A(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ , 則总可以用同一个非奇异的变量变换

$$q_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} \theta_j \quad (i=1, \dots, n; \det(u_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0), \quad (2)$$

将它们同时化为平方和<sup>①</sup>:

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \theta_j^2, \quad C(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j^2. \quad (3)$$

同时, 因为型  $C(\mathbf{q}, \mathbf{q})$  也是正定的(見 § 40), 故所有  $\lambda_j > 0$ 。

由于广义速度  $\dot{q}_i$  和  $\dot{\theta}_j$  之間的关系

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} \dot{\theta}_j \quad (i=1, \dots, n)$$

与  $q_i$  和  $\theta_j$  之間的关系一样, 故(3)式头一个等式中的  $q_i$  和  $\theta_j$  可代之以  $\dot{q}_i$  和  $\dot{\theta}_j$ , 于是得到动能和位能的如下表达式:

① 見, 例如, 前面第 193 頁上曾引用过的“矩陣論”一书第 I 章, § 6。

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

变量  $\theta_1, \dots, \theta_n$  叫做简正坐标或主坐标。将任意坐标化为简正坐标的变换式(2)也可以写成如下的矢量形式:

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^n \theta_j \mathbf{u}_j, \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{pmatrix} \quad (j=1, \dots, n).$$

因为坐标变换(2)是非奇异的, 故行列式  $\det(u_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0$ , 即矢量  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  线性无关。

利用  $T$  和  $\Pi$  在简正坐标中的简单表达式(4), 得此坐标中的拉格朗日方程如下:

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j \theta_j = 0 \quad (j=1, \dots, n). \quad (6)$$

每一个这样的方程只包含一个未知函数。如所周知, 方程(6)的通解规定一谐振动

$$\theta_j = C_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \quad (j=1, \dots, n), \quad (7)$$

其中  $C_j$  和  $\alpha_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) 是任意常数。将这些表达式代入公式(5), 则得振动的一般公式

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j). \quad (8)$$

这样, 我们便严格地证明了这公式在最一般情况下包括保守系统的所有微振动<sup>①</sup>。

① 在前一节中, 我们曾仅就长期方程无重根的情况证明了这个公式。

在(8)式中, 令  $C_j$  和  $\alpha_j$  以外的一切任意常数都等于零, 便得到第  $j$  个“主諧振动”

$$\mathbf{q} = C_j \mathbf{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j). \quad (9)$$

(在簡正坐标中, 当只有  $\theta_j$  在变化, 而所有的  $\theta_i = 0 (i \neq j)$  时, 所实现的正是这一振动。)在前一节中已经证明, 频率的平方  $\lambda_j = \omega_j^2$  满足频率方程。因为除了一般公式(8)所包含的諧振动項而外, 形式如(9)的其他諧振动对于  $\mathbf{q}$  不存在, 故  $\lambda_j = \omega_j^2 (j = 1, \dots, n)$  是长期方程的全部根。此外, 如果某个根在此重复出現  $p$  次, 則必有  $p$  个綫性无关的振幅矢量  $\mathbf{u}_j$  与之对应, 这些振幅矢量可由前节的綫性方程組(28)或(29)来确定。

这样, 我們便重新证明了长期方程的一切根  $\lambda_j$  都是正实数; 也重新证明了  $n$  个频率  $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$  对应于  $n$  个綫性无关的振幅矢量  $\mathbf{u}_j (j = 1, \dots, n)$ 。

将  $\mathbf{q}$  的表达式(5)代入  $A(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ , 便得到:

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = A\left(\sum_{j=1}^n \theta_j \mathbf{u}_j, \sum_{h=1}^n \theta_h \mathbf{u}_h\right) = \sum_{j,h=1}^n A(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_h) \theta_j \theta_h. \quad (10)$$

另一方面

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \theta_j^2. \quad (11)$$

将等式(10)和(11)加以比較, 即得关于振幅矢量  $\mathbf{u}_j (j = 1, \dots, n)$  (利用这些矢量就可以按公式(5)来实现向簡正坐标的过渡)的如下关系<sup>①</sup>:

$$A(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (12)$$

① 換句話說, 在度量  $A$  (見第 202 頁上的脚注①)之下, 矢量  $\mathbf{u}_j (j = 1, \dots, n)$  是正交的。

## § 42. 周期性外力对保守系统振动的影响

假设除有势力  $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$  而外, 在系统上还作用有某些力  $Q_i = Q_i(t) (i=1, \dots, n)$ 。今借公式

$$q_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} \theta_j \quad (i=1, \dots, n; \det(u_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0) \quad (1)$$

转换到简正坐标上去。

和坐标  $q_i$  中的力  $Q_i (i=1, \dots, n)$  相对应的是坐标  $\theta_j$  中的力  $\Theta_j (j=1, \dots, n)$ 。我们从力的元功表达式

$$\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^n \Theta_j \delta \theta_j \quad (2)$$

出发来建立  $Q_i$  和  $\Theta_j$  之间的关系。

注意, 由公式(1)可得

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} \delta \theta_j \quad (i=1, \dots, n), \quad (3)$$

将  $\delta q_i$  的这些表达式代入等式(2), 便得到:

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n u_{ij} Q_i \right) \delta \theta_j = \sum_{j=1}^n \Theta_j \delta \theta_j. \quad (4)$$

由此, 令简正坐标独立增量  $\delta \theta_j$  的系数相等, 便得到:

$$\Theta_j = \sum_{i=1}^n u_{ij} Q_i \quad (j=1, \dots, n). \quad (5)$$

因此, 若借矩阵  $U = \|u_{ij}\|$  可将“老坐标”  $q_i$  通过“新坐标”  $\theta_j$  表出:

$$\begin{aligned} q_1 &= u_{11}\theta_1 + u_{12}\theta_2 + \dots + u_{1n}\theta_n, \\ q_2 &= u_{21}\theta_1 + u_{22}\theta_2 + \dots + u_{2n}\theta_n, \\ &\dots\dots\dots (q = U\theta, \det U \neq 0), \end{aligned}$$



$$q_n = u_{n1}\theta_1 + u_{n2}\theta_2 + \cdots + u_{nn}\theta_n, \quad (6)$$

則“新的”广义力  $\Theta_j$  可借轉置矩陣  $U'$  通过“老的”广义力  $Q_i$  表出:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= u_{11}Q_1 + u_{21}Q_2 + \cdots + u_{n1}Q_n, \\ \Theta_2 &= u_{12}Q_1 + u_{22}Q_2 + \cdots + u_{n2}Q_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \Theta_n &= u_{1n}Q_1 + u_{2n}Q_2 + \cdots + u_{nn}Q_n. \end{aligned} \quad (\Theta = U'Q). \quad (7)$$

将矩陣公式  $q = U\theta$  和  $Q = (U')^{-1}\Theta$  进行比较, 就可以看出, 当由坐标过渡到力时, 变换矩陣  $U$  为矩陣  $(U')^{-1}$  ① 所代替。

也可以用这样一句话来说: 广义力的变换与坐标的变换相反 ②。

知道了如何按給定的  $Q_i$  来确定  $\Theta_j$  之后, 便可以利用前节中关于  $T$  和  $\Pi$  的表达式(4)写出簡正坐标中的拉格朗日方程:

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2 \theta_j = \Theta_j(t) \quad (j=1, \dots, n). \quad (8)$$

我們以  $\theta_j^*$  ( $j=1, \dots, n$ ) 表示方程(8)的任意一組特解。于是, 方程(8)的通解为:

$$\theta_j = C_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \theta_j^* \quad (j=1, \dots, n). \quad (9)$$

設  $\Theta_j(t)$  是頻率為  $\Omega$  的正弦型周期力:

$$\Theta_j(t) = A_j \sin \Omega t, \quad (10)$$

則不难看出, 可取

$$\theta_j^* = \frac{A_j}{\omega_j^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \quad (11)$$

作为方程(8)的特解。如果  $Q_i(t)$  ( $i=1, \dots, n$ ), 因而  $\Theta(t)$  ( $j=1, \dots, n$ ) 是以  $\tau$  为周期(頻率  $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$ ) 的任意周期力, 則  $\Theta_j(t)$  可以展成福里哀級数:

① 若  $U = \|u_{ij}\|_1^n$  是正交矩陣, 則  $(U')^{-1} = U$ , 因而力和坐标按同一方式变换。

② 在坐标变换为非綫性变换的一般情况下, 广义力的变换和坐标微分的变换相反。

$$\Theta_j(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{jm} \sin(m\Omega t + \varphi_{jm}) \quad (j=1, \dots, n). \quad (12)$$

于是, 由方程(8)的綫性型可知

$$\theta_j^* = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{jm}}{\omega_j^2 - m^2 \Omega^2} \sin(m\Omega t + \varphi_{jm}) \quad (j=1, \dots, n). \quad (13)$$

若某一个  $m\Omega$  和  $\omega_j$  重合, 而且对应的  $A_{jm} \neq 0$ , 則对于坐标  $\theta_j$  将出现共振現象。

将  $\theta_j$  的表达式(9)代入公式

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^n \theta_j \mathbf{u}_j,$$

則得

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^*, \quad (14)$$

其中

$$\hat{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \quad (15)$$

是自由振动, 而

$$\mathbf{q}^* = \sum_{j=1}^n \theta_j^* \mathbf{u}_j$$

是系統的强迫振动,  $\mathbf{u}_j$  是坐标为  $u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{n_j} (j=1, \dots, n)$  的振幅矢量。

### § 43. 保守系統頻率的极端性质 · 頻率随系統慣性和剛性而变的瑞利定理 · 約束对頻率的影响\*

在 § 41 中我們曾經討論了过渡到簡正坐标  $\theta_1, \dots, \theta_n$  的非奇异綫性坐标变换

---

\* 这个标题原书为“約束的施加”(Наложение связей), 为了更明确地标出正文内容, 譯者将它改成这样。

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^n \theta_j \mathbf{u}_j, \quad (1)$$

或數量形式的寫法

$$q_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} \theta_j \quad (i=1, \dots, n; \det(u_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0); \quad (1')$$

在簡正坐標中，二次型<sup>①</sup>

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q_i q_k, \quad C(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{i,k=1}^n C_{ik} q_i q_k \quad (2)$$

有如下的簡單(“正則”)形式:

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \theta_j^2, \quad C(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \omega_j^2 \theta_j^2. \quad (3)$$

往後我們將認為主振動的標號是按頻率增大的順序排的:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n. \quad (4)$$

我們來考察對於任意的  $\mathbf{q} \neq 0$  (也就是對於  $\theta_1, \dots, \theta_n$  的任意一組不同時為零的值), (3) 中兩個二次型之比:

$$\frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} = \frac{\omega_1^2 \theta_1^2 + \omega_2^2 \theta_2^2 + \dots + \omega_n^2 \theta_n^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_n^2}. \quad (5)$$

將上式分子中所有的  $\omega_j^2$  都換成小於或等於它的數  $\omega_1^2$ , 則得:

$$\frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \geq \omega_1^2. \quad (6)$$

另一方面, 從公式(5)可以直接看出, 當  $\theta_2 = \dots = \theta_n = 0$  時, 比值

$\frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}$  將達到  $\omega_1^2$ 。因此,

$$\omega_1^2 = \min \frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \quad (7)$$

①  $C(\mathbf{q}, \mathbf{q})$  為勢能的二倍; 將二倍動能表達式  $A(\mathbf{q}, \mathbf{q})$  中的  $\mathbf{q}$  換成  $\dot{\mathbf{q}}$  即得  $A(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ 。

② 如果在數軸上取  $n$  個點  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ , 在每個點上放置一個質點, 它們的質量分別為  $m_1 = \theta_1^2, m_2 = \theta_2^2, \dots, m_n = \theta_n^2$ , 則按公式(5), 比值  $\frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}$  就應當是這些點的质量中心的坐標。由此立即可得關係式(6)和(7), 因為質量中心總是在二邊界點之間, 而且當邊上一個點以外的其它各點質量均為零時, 質心便落在該點上。

現在在系統上施加一綫性齊次約束<sup>①</sup>:

$$l_1 q_1 + l_2 q_2 + \cdots + l_n q_n = 0 \left( \sum_{i=1}^n l_i^2 > 0 \right). \quad (8)$$

借變換(1)將這裏的  $q_1, q_2, \cdots, q_n$  用簡正坐標表出, 則在簡正坐標中約束仍然是綫性齊次的:

$$l'_1 \theta_1 + l'_2 \theta_2 + \cdots + l'_n \theta_n = 0 \left( \sum_{j=1}^n l_j'^2 > 0 \right). \quad (8')$$

我們將約束(8)或(8')都簡單地寫作

$$L = 0.$$

顯然, 總可以找到  $\theta_1$  和  $\theta_2$  這樣的值: 它和  $\theta_3 = \cdots = \theta_n = 0$  一起滿足約束方程(8')。對於相應的  $q$ , 按公式(5)便有:

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\omega_1^2 \theta_1^2 + \omega_2^2 \theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \leq \omega_2^2.$$

因之, 有<sup>②</sup>

$$\min_{L=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)} \leq \omega_2^2. \quad (9)$$

現在給約束  $L=0$  以變更, 則不等式(9)的左端將發生改變, 但卻永遠小於或等於  $\omega_2^2$ 。在形式為  $\theta_1=0$  的約束 (即  $l'_1=1, l'_2=\cdots=l'_n=0$ ) 之下, 比值  $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$  由公式

① 如果給的是非綫性約束, 而且平衡位置滿足約束方程, 則約束方程左端的冪級數展開式中無自由項:

$$l_1 q_1 + l_2 q_2 + \cdots + l_n q_n + \sum_{i, k=1}^n l_{ik} q_i q_k + \cdots = 0.$$

此外, 我們還假設綫性項的確存在, 即  $\sum_{i=1}^n l_i^2 > 0$ 。於是, 當略去二階及更高階小量的項之後, 約束方程便可以寫成(8)的形式。

② 不等式(9)左方的符號表示當矢量  $q \neq 0$  滿足約束方程(8)時,  $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$  的最小值。

$$\frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} = \frac{\omega_2^2 \theta_2^2 + \cdots + \omega_n^2 \theta_n^2}{\theta_2^2 + \cdots + \theta_n^2}$$

給出, 因之, [与公式(5)和(7)相类似]有

$$\min_{\theta_1=0} \frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} = \omega_2^2.$$

因此, 在所有形如  $L=0$  的約束中, 量

$$\min_{L=0} \frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}$$

在約束  $\theta_1=0$  之下达到最大值  $\omega_2^2$ 。因之,

$$\max \min_{L=0} \frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} = \omega_2^2. \quad (10)$$

来代替一个約束  $L=0$ 。可以在系統上施加若干個約束  $L_1=0, \dots, L_{h-1}=0$ , 仿照在一个約束的特殊情況下所作的那樣, 可以证明

$$\omega_h^2 = \max_{\substack{L_1=0 \\ \vdots \\ L_{h-1}=0}} \min \frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \quad (h=2, \dots, n). \quad (11)$$

公式(7)和(11)表示出保守系統頻率的極端性質。這些性質有時被稱為最大最小性質。

代替公式(7)和(11)不難得出類似的公式:

$$\omega_n^2 = \max \frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}, \quad (7')$$

$$\omega_{n-h}^2 = \min \max_{\substack{L_1=0 \\ \vdots \\ L_h=0}} \frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \quad (h=1, \dots, n-1). \quad (11')$$

由等式(7')和(11')所表示的主頻率極端性質有時稱為最小最大性質①。

除了給定的系統而外, 我們再考察另一個保守系統, 它的動能和勢能分別為

① 頻率的極端性質是德國數學家 E. 費舍爾 (Monatshefte für Math. und Phys., 16 (1905), 234—249) 和 P. 庫蘭特 (Zeitschrift für angew. Math. und Mech., 2 (1922), 278—285) 建立的。

$$\frac{1}{2}\tilde{A}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \tilde{a}_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad \frac{1}{2}\tilde{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \tilde{c}_{ik} q_i q_k, \quad (12)$$

主频率为

$$\tilde{\omega}_1 \leq \tilde{\omega}_2 \leq \cdots \leq \tilde{\omega}_n. \quad (13)$$

对此系统, 有

$$\tilde{\omega}_1^2 = \min \frac{\tilde{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{\tilde{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q})}, \quad (14)$$

$$\tilde{\omega}_h^2 = \max_{\substack{L_1=0 \\ \vdots \\ L_{h-1}=0}} \min \frac{\tilde{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{\tilde{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \quad (h=2, \dots, n). \quad (15)$$

假设新系统和原系统相比惯性相同, 刚性较大, 即对于任何  $\mathbf{q}$ , 有

$$\tilde{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = A(\mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad \tilde{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geq C(\mathbf{q}, \mathbf{q}),$$

或者是: 惯性较小刚性相同, 即

$$\tilde{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \leq A(\mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad \tilde{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \mathbf{q}).$$

在两种情况下, 对于任何  $\mathbf{q} \neq 0$ , 都有:

$$\frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \leq \frac{\tilde{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{\tilde{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q})}. \quad (16)$$

因而这两个比式的最小值和最大最小值也以同样的不等式相联系, 即根据公式(7), (11), (14)和(15), 由不等式(16)便可断定

$$\omega_j \leq \tilde{\omega}_j \quad (j=1, \dots, n). \quad (17)$$

同时, 只要恒等式

$$\frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} = \frac{\tilde{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{\tilde{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \quad (18)$$

不被满足, 关系式(17)至少有一个  $<$  号成立<sup>①</sup>。

于是, 得瑞利定理<sup>②</sup>如下:

① 事实上, 按公式(5), 在  $\omega_j = \tilde{\omega}_j (j=1, \dots, n)$  的情况下, 恒等式(18)成立。

② 这个定理是英国物理学家瑞利于1873年建立的 (Релей Дж. В., Теория звука, М., 1955, т. I, § 88)。

當增強系統的剛性或減弱系統的慣性時，主頻率增高<sup>①</sup>。

我們來看約束的施加對保守系統主頻率的值  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$  有什麼影響。

設在系統上有  $s$  個獨立的綫性約束作用着：

$$\widehat{L}_1 = 0, \widehat{L}_2 = 0, \dots, \widehat{L}_s = 0.$$

假設如此所得到的  $n-s$  個自由度的保守系統的主頻率為  $\omega_1^* \leq \omega_2^* \leq \dots \leq \omega_{n-s}^*$ 。在此，

$$\omega_1^{*2} = \min_{\substack{\widehat{L}_1=0 \\ \dots \\ \widehat{L}_s=0}} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}. \quad (19)$$

將公式(19)與公式(7)和(11)(此時  $h-1=s$ )加以比較，我們便得到：

$$\omega_1 \leq \omega_1^* \leq \omega_{s+1}. \quad (20)$$

對於任意的  $h \leq n-s$ ，則有

$$\omega_h^{*2} = \max_{\substack{\widehat{L}_1=0, \dots, \widehat{L}_s=0 \\ L_1=0, \dots, L_{h-1}=0}} \min \frac{C(q, q)}{A(q, q)}. \quad (21)$$

這裡，約束  $\widehat{L}_1=0, \dots, \widehat{L}_s=0$  是固定的，而約束  $L_1=0, \dots, L_{h-1}=0$  則是可變更的。將等式(21)和等式(11)以及公式

$$\omega_{h+s}^2 = \max_{\substack{L_1=0 \\ \dots \\ L_{h+s-1}=0}} \min \frac{C(q, q)}{A(q, q)}$$

(其中  $s+h-1$  個約束全都是可以變更的)加以比較，便得到

$$\omega_h \leq \omega_h^* \leq \omega_{h+s} \quad (h=1, \dots, n-s). \quad (22)$$

(22)式表明，當施加  $s$  個獨立約束時，前  $n-s$  個主頻率每個

① 主頻率的增大程度，在增強剛度的情況下可以按  $\widetilde{C}(q, q)$  與  $C(q, q)$  之差來估計，在減弱慣性的情況下可按  $\widetilde{A}(q, q)$  與  $A(q, q)$  之差來估計(見 Гантмахер Ф.Р. и Крейн М.Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2, 1950, 3章, § 10)。

都要增大(严格地說是: 每个都不低于原来頻率中序号相同的那一个——譯者), 但不超过原来主頻率中序号比它大  $s$  的那一个。

1. 作为上述論断的一个应用, 我們来证明长期方程  $\Delta(\lambda) \equiv \det(c_{ik} - \lambda a_{ik})_{i,k=1}^n = 0$  的根  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  和方程

$$\Delta_1(\lambda) \equiv \det(c_{ik} - \lambda a_{ik})_{i,k=1}^{n-1} = 0 \textcircled{1}$$

的根  $\lambda_1^* \leq \dots \leq \lambda_{n-1}^*$  依次相間, 即

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^* \leq \lambda_2 \leq \lambda_2^* \leq \dots \leq \lambda_{n-1}^* \leq \lambda_n. \quad (23)$$

事实上, 方程  $\Delta_1(\lambda) = 0$  是对原系統施以  $q_n = 0$  的約束之后而得到的保守系統的长期方程。因之, 当令  $\lambda_k = \omega_k^2$  ( $k = 1, \dots, n$ ),  $\lambda_j^* = \omega_j^{*2}$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ) 时, 立即可由不等式(22)(此时  $s = 1$ )得不等式(23)。

2. 我們再指出一个非常有趣的事实, 來說明約束的施加使頻率改变的这个論断。大家知道, 用手指敲击玻璃杯, 就能确定它有无裂縫。这是因为沒有裂縫的杯子的质点, 比有裂縫的杯子的质点受有更多約束之故。因之, 无裂縫杯子的振动頻率应当較高。

#### § 44. 彈性系統的微振动

作为保守系統微振动的一个重要例子, 我們来考察  $n$  个质量  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 它們分別被集中在彈性系統  $S$  (弦, 杆, 膜, 板等) 的  $n$  个点(1), (2),  $\dots$ , ( $n$ )上, 系統  $S$  的大小是有限的, 以任意方式固定在边界上。

設系統  $S$  的(1), (2),  $\dots$ , ( $n$ )点的位移(撓度)各为  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 作用在质量  $m_1, m_2, \dots, m_n$  上的力各为  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , 它們相互平行, 因而可用代数量来确定(图 50)。撓度  $y_1, y_2, \dots, y_n$  可以看作系統的独立坐标, 諸力  $F_1,$

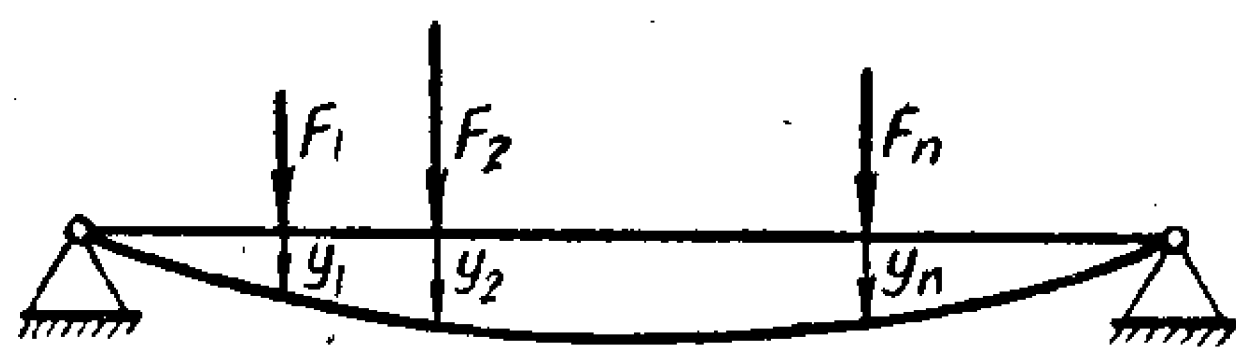


图 50.

$F_2, \dots, F_n$  則可看作与之对应的广义力, 因为这些力的元功等于

$$\sum_{i=1}^n F_i dy_i.$$

当研究自由振动时, 我們取由于撓度  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的存在而引起来自彈性系統  $S$  方面的、作用在质量  $m_1, m_2, \dots, m_n$  上的彈性力  $F_1^*, F_2^*, \dots, F_n^*$  作为力

①  $\Delta_1(\lambda)$  是行列式  $\Delta(\lambda)$  的第  $n-1$  阶主子式。有时也說, 不等式(23)表达了长期方程根的“分隔定理”。不等式(23)可用来求长期方程根的上下界。(見, 例如, Бабаков И. М., Теория колебаний, Гостехиздат, 1958, 第 106—107 頁。)



$F_1, F_2, \dots, F_n$ 。这个在彈性力作用下的  $n$  个质点的系統是保守的, 而且有一定的势能  $\Pi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。将函数  $\Pi(y_1, y_2, \dots, y_n)$  展成幂級数, 并在展开式中只保留平方項(見 § 40), 則得  $\Pi$  的表达式如下:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} y_i y_k \quad (c_{ik} = c_{ki}; i, k = 1, \dots, n). \quad (1)$$

于是, 关于彈性力  $F_i^* = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i} (i = 1, \dots, n)$ , 便有

$$F_i^* = - \sum_{k=1}^n c_{ik} y_k \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

設平衡位置  $y_1 = \dots = y_n = 0$  是稳定的, 則表势能為撓度的函数的二次型(1)是正定的:

$$\sum_{i,k=1}^n c_{ik} y_i y_k > 0 \quad \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 > 0 \right). \quad (3)$$

系統的动能有如下的簡單形式:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i^2. \quad (4)$$

当求諧振动  $y_i = u_i \sin(\omega t + \alpha)$  时 (一如在 § 40 中所作的那樣), 我們便得到頻率方程

$$\begin{vmatrix} c_{11} - m_1 \lambda & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - m_2 \lambda & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - m_n \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda = \omega^2) \quad (5)$$

和一組确定振幅的代数方程

$$\sum_{k=1}^n (c_{ik} - \lambda m_i \delta_{ik}) u_k = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6)$$

系統有  $n$  个頻率

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n \quad (7)$$

和对应的振幅矢量  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ; 自由振动可由公式

$$y = \sum_{j=1}^n C_j u_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \quad (8)$$

来确定, 其中  $C_j$  和  $\alpha_j (j = 1, \dots, n)$  是任意常数, 由初始条件决定。

設外力  $F_1, \dots, F_n$  所引起的靜撓度为  $y_1, \dots, y_n$ 。于是, 力  $F_i$  和彈性力  $F_i^*$  相互平衡(即  $F_i = -F_i^*$ ;  $i = 1, \dots, n$ ), 因之, 按等式(2), 便有:

$$F_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} y_k \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9)$$

在研究彈性系統时, 矩陣  $\mathbf{C} = \|c_{ik}\|_1^n$  ① 的逆矩陣  $\mathbf{G} = \|g_{ik}\|_1^n$ , 即

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}^{-1}$$

起着重要作用。

利用矩陣  $\mathbf{G}$  可将撓度  $y_1, y_2, \dots, y_n$  从方程(9)解出, 写成如下形式:

$$y_i = \sum_{k=1}^n g_{ik} F_k \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10)$$

量  $g_{ik}$  等于作用在( $k$ )点的单位外力在( $i$ )点引起的撓度, 叫做( $k$ )点对( $i$ )点的影响系数( $i, k = 1, \dots, n$ )。由矩陣  $\mathbf{C}$  的对称性可知, 由影响系数构成的矩陣  $\mathbf{G}$  是对称的, 即②

$$g_{ik} = g_{ki} \quad (i, k = 1, \dots, n). \quad (11)$$

另外, 由型(3)的正定性可以断定, 二次型  $G(\mathbf{F}, \mathbf{F})$  是正定的, 即

$$G(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} F_i F_k > 0 \quad \left( \sum_{i=1}^n F_i^2 > 0 \right), \quad (12)$$

因为在变换(10)之下, 二次型  $\sum_{i,k=1}^n c_{ik} y_i y_k$  轉換为二次型(12):

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} y_i y_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i y_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n g_{ik} F_i F_k. \quad (13)$$

我們来看綫性彈性系統  $S$ , 即具有普通固定端的弦或杆。可以证明, 在这种情况下, 影响系数矩陣  $\mathbf{G}$  有如下性质。

1°. 矩陣  $\mathbf{G}$  的所有任意阶子式(不仅是主子式!)都是非負的:

$$\begin{vmatrix} g_{i_1 k_1} & \cdots & g_{i_1 k_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{i_p k_1} & \cdots & g_{i_p k_p} \end{vmatrix} \geq 0$$

① 矩陣  $\mathbf{C}$  是非奇异的(即  $\det \mathbf{C} \neq 0$ ), 因为二次型(3)是正定的。

② 等式(11)表示出所謂的馬克斯威尔互易性原理: “作用在( $k$ )点的单位力在( $i$ )点所引起的撓度, 等于作用在( $i$ )点的单位力在( $k$ )点所引起的撓度”。

$$(0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n; 0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p \leq n; p=1, \dots, n).$$

2°. 当  $|i-k| \leq 1$  时,  $g_{ik} > 0$  ( $i, k=1, \dots, n$ )。

3°. 行列式  $\det \mathbf{G} = |g_{ik}|_1^n > 0$ 。

具有性质 1°, 2°, 3° 的矩陣叫做颤动矩陣。

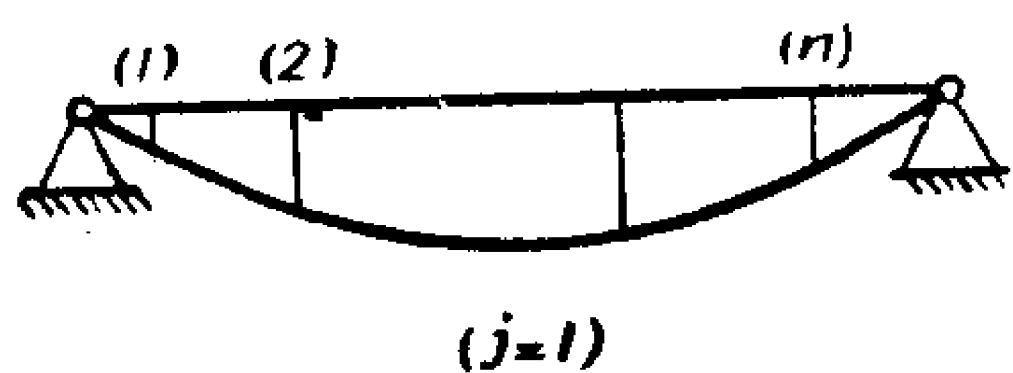
应当注意, 任何正定矩陣  $\mathbf{G}$  都滿足性质 3°, 以及关于主子式的不等式 1° 和关于对角綫元素  $g_{ii}$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的不等式 2°。但是, 任意的  $p$  阶非主子式的非負性① 和元素  $g_{12}, \dots, g_{n-1, n}$  的正性却都是綫性彈性系統影响系数矩陣的独特性质。

由影响系数矩陣的颤动性可以得出綫性系統彈性振动如下的基本“颤动”性质。

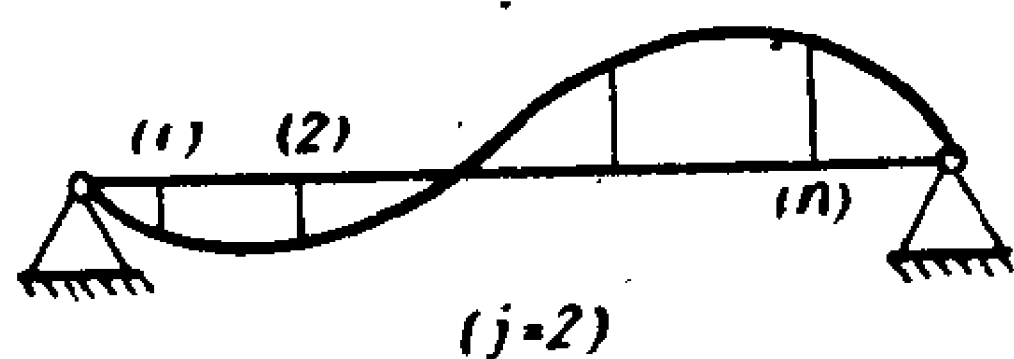
1°. 所有頻率互不相同:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n.$$

2°. 第一主振动(頻率為  $\omega_1$ ) 的所有振幅  $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}$  都不等于零, 而且有相同的符号。



(j=1)



(j=2)

图 51.

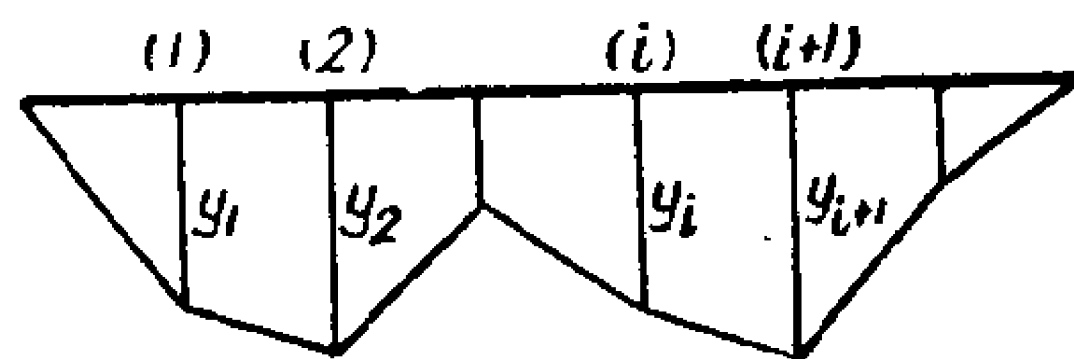


图 52.

3°. 在頻率為  $\omega_j$  的第  $j$  个主振动中, 振幅  $u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}$  有  $j-1$  次变号 ( $j=1, \dots, n$ ) (图 51)。

颤动矩陣的研究以及对彈性振动颤动性质的論证都超出了本书的討論範圍②。

**例題.** 我們来討論有限长弦振动的古典問題: 弦长为  $l$ , 两端固定, 弦的全部质量集中在二端点間的  $n$  个等距离点上, 且集中质量彼此相等, 都等于  $m$  (图 52)。

① 包括矩陣  $\mathbf{G}$  非对角綫元素的非負性(即当  $i \neq k$  时  $g_{ik} \geq 0$  的性质)。

② 关于这部分材料讀者可以在下面的书中找到: Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, изд. 2, М., 1950。

第  $i$  段弦(即挠度为  $y_i$  和  $y_{i+1}$  的两点间的那一段)的伸长(精确到四阶小量)可以表示如下:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{l}{n+1}\right)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} - \frac{l}{n+1} = \\ & = \frac{l}{n+1} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{n+1}{l}\right)^2 (y_{i+1} - y_i)^2} - 1 \right) \approx \frac{n+1}{2l} (y_{i+1} - y_i)^2. \end{aligned}$$

設弦中張力  $\sigma$  不变①, 則得势能表达式

$$\Pi = \frac{c}{2} \sum_{i=0}^n (y_{i+1} - y_i)^2 \quad (y_0 = y_{n+1} = 0; \quad c = \frac{\sigma(n+1)}{l}). \quad (14)$$

动能有简单形式:

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{y}_i^2. \quad (15)$$

我們用間接的方法② 来求主频率和与之对应的振幅矢量。利用  $\Pi$  和  $T$  的表达式(14)和(15)列出求振幅的方程組(6)。以  $c$  除这方程組的每个方程, 同时, 为简单計, 我們令

$$1 - \frac{m}{2c} \omega^2 = \cos \theta, \quad (16)$$

式中  $\theta$  为一輔助量。于是, 振幅方程(6)取如下形式:

$$u_{k-1} - 2u_k \cos \theta + u_{k+1} = 0 \quad (k=1, \dots, n), \quad (17)$$

其中

$$u_0 = u_{n+1} = 0. \quad (18)$$

若令

$$u_k = \sin k\theta \quad (k=0, 1, \dots, n+1), \quad (19)$$

則代数方程(6)将得以滿足③。这里, “边界”条件(18)的头一个将自动滿足, 而第二个則給出确定未知频率的条件:

$$\sin(n+1)\theta = 0. \quad (20)$$

由此即得  $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$  ( $j=1, \dots, n$ ), 因而, 按照等式(16)便有:

① 仅当討論小挠度  $y_1, y_2, \dots, y_n$  时, 这个假定才是正确的。

② 見 Крейн М. Г., Математический сборник, т. 40, 1933, стр. 455—466。

③ 当以表达式(19)代入方程(17)时, 便得到下列三角恒等式:

$$\sin(k-1)\theta - 2\sin k\theta \cos \theta + \sin(k+1)\theta = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

$$\omega_j^2 = \frac{2c}{m}(1 - \cos \theta_j),$$

即

$$\left. \begin{aligned} \omega_j &= 2\sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{\theta_j}{2} = 2\sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{j\pi}{2(n+1)} \\ &\left( j=1, \dots, n; c = \frac{(n+1)\sigma}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

在等式(19)中令  $\theta = \theta_j$ , 即得第  $j$  个主振动的振幅  $u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}$ :

$$u_{kj} = \sin k\theta_j = \sin \frac{kj\pi}{n+1} \quad (k, j=1, \dots, n). \quad (22)$$

系統的任何自由振动可由下式决定:

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{j=1}^n C_j u_{kj} \sin(\omega_j t + \alpha_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n C_j \sin \frac{kj\pi}{n+1} \sin \left( 2 \sin \frac{j\pi}{2(n+1)} \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} t + \alpha_j \right). \end{aligned} \quad (23)$$

由公式(21)和(22)立即可以見出, 所得主振动具有颤动性质  $1^\circ - 3^\circ$ 。

拉格朗日曾經指出怎样由所得之公式借极限过渡的方法可以得到均匀弦(有固定端)的自由振动, 此时弦的质量不再集中在  $n$  个点上, 而是以密度  $\rho$  沿弦均匀分布。

在所討論的問題中, 設  $m = \frac{\rho l}{n}$ , 則对于均匀弦主頻率得不連續类比公式:

$$\omega_j^{(n)} = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} n(n+1)} \sin \frac{j\pi}{2(n+1)} \quad (j=1, \dots, n). \quad (24)$$

在  $n \rightarrow \infty$  的极限情况下, 便得到关于两端固定的均匀弦的頻率  $\omega_j$  的著名公式:

$$\omega_j = j \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (j=1, 2, \dots). \quad (25)$$

这公式表述出麦尔心定律, 按此定律, 所有頻率都是基音頻率  $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$  的整数倍, 而且各頻率都和張力的平方根成正比, 和弦长及密度平方根成反比。

現將均匀弦的第  $j$  个諧振动写成

$$y_j(x, t) = u_j(x) \sin(\omega_j t + \alpha_j) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (26)$$

的形式, 其中  $u_j(x)$  是在此振动中撓度的振幅。

將撓度振幅  $u_j(x)$  看作当  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{kl}{n+1} \rightarrow x$  时量(22)的极限:

$$u_j(x) = \lim u_{kj},$$

则由公式(22)便得到:

$$u_j(x) = \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (j=1, 2, \dots).$$

于是, 将主振动(26)作线性叠加而得到的均匀弦自由振动可由如下公式表示:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin \frac{j\pi x}{l} \sin(\omega_j t + \alpha_j),$$

其中  $C_j$  和  $\alpha_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) 都是任意常数。

#### § 45. 在不显含时间的力的作用下, 平稳系统的微振动

当广义力  $Q_i$  仅与坐标和速度有关时, 平稳系统的拉格朗日方程为:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_k, \dot{q}_k) \quad (i=1, \dots, n). \quad (1)$$

假设坐标原点是平衡位置。于是, 精确到关于  $q_i$  和  $\dot{q}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 为二阶小量的动能表达式可以写成常系数二次型(见 §40)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (2)$$

其中  $a_{ik} = a_{ki}$  ( $i, k=1, \dots, n$ )。

现在将广义力  $Q_i(q_k, \dot{q}_k)$  按  $q_k$  和  $\dot{q}_k$  展成幂级数:

$$Q_i = Q_{i0} + \sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \right)_0 q_k + \left( \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k} \right)_0 \dot{q}_k \right] + (**). \quad (3)$$

因为坐标原点是平衡位置, 故当坐标和速度同为零时, 所有广义力应当等于零, 即

$$Q_{i0} = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (4)$$

令

$$b_{ik} = - \left( \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k} \right)_0, \quad c_{ik} = - \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \right)_0 \quad (i, k=1, \dots, n), \quad (5)$$

则当略去(3)式中所有二阶及更高阶小量的各项之后, 便有

$$Q_i = - \sum_{k=1}^n (b_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) \quad (i=1, \dots, n). \quad (6)$$

将动能和广义力的表达式(2)和(6)代入拉格朗日方程(1), 则得平稳系统微振动的线性运动微分方程组

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + b_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (7)$$

若以  $A, B, C$  分别表示方阵  $\|a_{ik}\|_1^n, \|b_{ik}\|_1^n, \|c_{ik}\|_1^n$ ①,  $q$  表示分量为  $q_1, \dots, q_n$  的矢量列, 则微分方程组(7)可以写成如下的矩阵形式:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0. \quad (8)$$

我们来找方程组(8)如下形式的解:

$$q = u e^{\mu t}, \quad (9)$$

其中  $u$  是常元素  $u_1, \dots, u_n$  的矢量列,  $\mu$  是一个数。

将表达式(9)代入矩阵方程(8), 约去  $e^{\mu t}$  之后, 得:

$$(A\mu^2 + B\mu + C)u = 0, \quad (10)$$

或写成展开形式:

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik}\mu^2 + b_{ik}\mu + c_{ik})u_k = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (10')$$

为使方程组(10)或(10')有非零解  $u$ , 必须且只须此方程组的系数行列式为零, 即

$$\Delta(\mu) \equiv \det(A\mu^2 + B\mu + C) = 0, \quad (11)$$

或展开之, 写成

$$\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}\mu^2 + b_{11}\mu + c_{11} & \dots & a_{1n}\mu^2 + b_{1n}\mu + c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\mu^2 + b_{n1}\mu + c_{n1} & \dots & a_{nn}\mu^2 + b_{nn}\mu + c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (11')$$

① 注意,  $A$  是正定对称矩阵(这个性质在此没有用到)。

方程(11)叫做已知系统的长期方程。这个代数方程关于 $\mu$ 是 $2n$ 阶的。

我们仅限于讨论长期方程的所有根 $\mu_1, \dots, \mu_{2n}$ 彼此互异的这一基本情况。对于每个根 $\mu_h$ ，都有齐次代数方程组(10)的某个非零解 $\mathbf{u}_h \equiv (u_{1h}, \dots, u_{nh})$ 与之对应，因而也就有微分方程组(8)的特解 $\mathbf{u}_h e^{\mu_h t}$ 与之对应( $h=1, \dots, 2n$ )。此微分方程组的通解，可由这些特解的具有任意常系数的线性组合而得到。

$$\mathbf{q} = \sum_{h=1}^{2n} C_h \mathbf{u}_h e^{\mu_h t}. \quad (12)$$

特别重要的是，全体根 $\mu_h$ 的实数部分都是负数的这一情况：

$$\operatorname{Re} \mu_h < 0 \quad (h=1, \dots, 2n).$$

此时，系统的平衡位置不仅对于线性化了的方程组(8)是渐近稳定的，而且对于原来以微分方程组(1)所描述的非线性平稳系统也是渐近稳定的(见§38)。

最后我们指出，对于保守系统， $\mathbf{B} = \|b_{ik}\|_1^n = 0$ ，而 $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|_1^n$ 和 $\mathbf{C} = \|c_{ik}\|_1^n$ 都是对称的正定矩阵。若令 $\mu = i\sqrt{\lambda}$  ( $i = \sqrt{-1}$ )，则长期方程 $\det(\mathbf{A}\mu^2 + \mathbf{C}) = 0$ 便化为§40中的方程 $\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{A}) = 0$ 。但是，正如在§40中所指出的，方程 $\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{A}) = 0$ 只有正实根。因此，在保守系统的情况下，方程(11)只有纯虚根。

#### §46. 瑞利耗散函数·小耗散力对保守系统振动的影响

我们来看这样一个重要的特殊情况：无需使用§39所表述的稳定性准则，就可以预先断定平衡位置的渐近稳定性。

假设在广义力的表达式[见第225页等式(6)]

$$Q_i = - \sum_{k=1}^n b_{ik} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^n c_{ik} q_k \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$



中, 系数矩阵  $\mathbf{B} = \|b_{ik}\|_1^n$  和  $\mathbf{C} = \|c_{ik}\|_1^n$  都是对称正定矩阵。

于是, 若在讨论中引入势能  $\Pi$  和瑞利耗散  $R$  (见 § 8):

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k > 0, \quad R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k > 0$$

$$\left( \sum_{i=1}^n q_i^2 > 0, \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 > 0 \right), \quad (2)$$

则公式(1)便可写成

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (3)$$

系统上除有势力  $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$  ( $i=1, \dots, n$ ) 而外, 还作用有由瑞利函数决

定的耗散力  $-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$ 。前已查明(见 § 8), 在这种情况下, 系统是定耗

散的。又因为按照(2)中第一个公式, 势能在平衡位置有严格极小值, 故平衡位置是渐近稳定的(见第 172 页上的定理)。

因此, 由瑞利函数所决定的耗散力, 不仅不破坏保守系统平衡位置的稳定性, 而且还使此位置成为渐近稳定的。

在所讨论的情况下, 可以给出一个简单公式来估计长期方程的根。我们仍然来找形如  $ue^{\mu t}$  的解。为了决定矢量列  $u$ , 我们有方程(见第 225 页)

$$(\mathbf{A}\mu^2 + \mathbf{B}\mu + \mathbf{C})u = 0, \quad (4)$$

或写成展开形式:

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik}\mu^2 + b_{ik}\mu + c_{ik})u_k = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (4')$$

将(4')式第  $i$  个方程的两端各乘以  $\bar{u}_i$  ( $\bar{u}_i$  是  $u_i$  的共轭复数), 并对  $i$  求和, 则得:

$$\mu^2 \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \bar{u}_i u_k + \mu \sum_{i,k=1}^n b_{ik} \bar{u}_i u_k + \sum_{i,k=1}^n c_{ik} \bar{u}_i u_k = 0,$$

或简写成

$$A(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})\mu^2 + B(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})\mu + C(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (5)$$

其中  $A(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) > 0, B(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) > 0, C(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) > 0$ ①.

因此, 长期方程的任何根  $\mu$  都满足具有正系数的二次方程(5)。由此立即可得  $\operatorname{Re}\mu < 0$ 。

若长期方程有复根  $\mu = \gamma + i\delta$ , 则此同一方程也必有共轭复根  $\bar{\mu} = \gamma - i\delta$ 。数  $\mu$  和  $\bar{\mu}$  都是二次方程(5)的根。因此, 若令  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}, \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{v} - i\mathbf{w}$  ( $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{w}$  都是实矢量列), 则有②:

$$\left. \begin{aligned} 2\operatorname{Re}\mu = \mu + \bar{\mu} &= -\frac{B(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})}{A(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})} = -\frac{B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{w}, \mathbf{w})}{A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + A(\mathbf{w}, \mathbf{w})} < 0, \\ |\mu|^2 = \mu\bar{\mu} &= \frac{C(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})}{A(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})} = \frac{C(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + C(\mathbf{w}, \mathbf{w})}{A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + A(\mathbf{w}, \mathbf{w})}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

与共轭复根  $\mu$  和  $\bar{\mu}$  相对应的是复共轭振动  $\mathbf{u}e^{\mu t}$  和  $\bar{\mathbf{u}}e^{\bar{\mu}t}$ 。在  $\mathbf{q}$  的表达式[見第 226 頁上的公式(12)]中, 当任意常系数取复共轭值  $C = \frac{1}{2}(F + iG)$  和  $\bar{C} = \frac{1}{2}(F - iG)$  时, 对应項之和可化为实数形式:

$$\begin{aligned} C\mathbf{u}e^{\mu t} + \bar{C}\bar{\mathbf{u}}e^{\bar{\mu}t} &= \frac{1}{2}(F + iG)(\mathbf{v} + i\mathbf{w})e^{(\gamma + i\delta)t} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(F - iG)(\mathbf{v} - i\mathbf{w})e^{(\gamma - i\delta)t} = \\ &= \operatorname{Re}\{[F\mathbf{v} - G\mathbf{w} + i(F\mathbf{w} + G\mathbf{v})]e^{\gamma t}(\cos\delta t + i\sin\delta t)\} = \\ &= e^{\gamma t}[(F\mathbf{v} - G\mathbf{w})\cos\delta t - (F\mathbf{w} + G\mathbf{v})\sin\delta t]. \end{aligned} \quad (7)$$

若有两个实根  $\mu$  和  $\mu'$ , 我們將对应的矢量列記作  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{u}'$ , 則当以  $u'_i$  (代替  $\bar{u}_i$ ) 乘(4')式第  $i$  个方程时, 代替等式(5)便得到如下等式:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{u}')\mu^2 + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}')\mu + C(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = 0. \quad (8)$$

① 見第 202 頁上的 5°。

② 見第 201 頁上的公式(20)。

将矢量  $u$  和  $u'$  的地位调换一下便可以见出数  $\mu'$  也满足方程(8)。

因此,

$$\mu + \mu' = -\frac{B(u, u')}{A(u, u')}, \quad \mu\mu' = \frac{C(u, u')}{A(u, u')}. \quad (9)$$

我们现在来看, 在小耗散力作用下, 保守系统的主振动将发生怎样的变化<sup>①</sup>。引入简正坐标  $\theta_1, \dots, \theta_n$ 。在这些坐标之下,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \theta_i^2, \quad (10)$$

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_j \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, k=1 \\ (i \neq k)}}^n \beta_{ik} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_k, \quad (11)$$

其中  $\omega_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 是保守系统的主频率, 瑞利函数表达式(11)中的系数  $\beta_i$ ,  $\beta_{ik}$  ( $i, k=1, \dots, n$ ; 当  $i \neq k$  时  $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ ) 均为小量(这些量的平方项和乘积项可以略去)。由二次型(11)的正定性可知  $\beta_i > 0$  ( $i=1, \dots, n$ )。

拉格朗日方程为

$$\ddot{\theta}_i + \beta_i \dot{\theta}_i + \omega_i^2 \theta_i + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \beta_{ik} \dot{\theta}_k = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (12)$$

由此代入

$$\theta_i = x_i e^{\mu t} \quad (i=1, \dots, n), \quad (13)$$

并约去  $e^{\mu t}$ , 则得线性方程组

$$(\mu^2 + \beta_i \mu + \omega_i^2) \kappa_i + \mu \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \beta_{ik} \kappa_k = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (14)$$

令此组的系数行列式为零, 得长期方程

$$\begin{vmatrix} \mu^2 + \beta_1 \mu + \omega_1^2 & \beta_{12} \mu & \cdots & \beta_{1n} \mu \\ \beta_{21} \mu & \mu^2 + \beta_2 \mu + \omega_2^2 & \cdots & \beta_{2n} \mu \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} \mu & \beta_{n2} \mu & \cdots & \mu^2 + \beta_n \mu + \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

将此行列式展开, 并略去那些包含小系数  $\beta_i, \beta_{ik}$  的乘积项, 则长期方程

① 見 Уиттекер E. T., Аналитическая динамика, М.—Л., 1937, § 94.  
(有英文本)



周期( $j=1, \dots, n$ )。

### § 47. 与时间有关的外力对平稳系统微振动的影响。

#### 幅-相特性

假设在平稳系统上,除了 § 45 中所说的那些力而外,还作用有力  $Q_i(t)$  ( $i=1, \dots, n$ )。此时,系统微振动的拉格朗日方程和第 225 页上方程(7)的差别仅在于右端有非零项存在:

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + b_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) = Q_i(t) \quad (i=1, \dots, n). \quad (1)$$

这个非齐次微分方程组的通解可以写成

$$\mathbf{q} = \sum_{h=1}^{2n} C_h \mathbf{u}_h e^{\mu_h t} + \mathbf{q}^* \quad (2)$$

的形式,其中第一个和式乃是对应齐次方程组的通解,  $\mathbf{q}^*$  是组(1)的某一特解。

假设系统的位置  $q_1 = \dots = q_n = 0$  是渐近稳定的平衡位置,即  $\operatorname{Re} \mu_h < 0$  ( $h=1, \dots, 2n$ )。于是,当  $t \rightarrow \infty$  时,第一个和式趋于零<sup>①</sup>,因而在足够长的时间  $t$  之后,非齐次方程组的通解  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{q}^*$  实际上是一样的。因此,我们今后将仅对“强迫振动” $\mathbf{q}^*$  感到兴趣,而且就简单地把它写作  $\mathbf{q}$ 。

由于微分方程组(1)是线性的,故(按线性叠加原理)找一般情况的强迫振动可归结为只有一个非零广义力  $Q_i(t)$  的情况。

譬如,设  $Q_1(t) \neq 0$ , 而  $Q_j(t) = 0$  ( $j=2, \dots, n$ )。此外,先假设  $Q_1(t)$  是谐和力,即

$$Q_1(t) = A e^{i\omega t}. \quad (3)$$

① 若长期方程有重根,则在等式(2)右端的和式中将会出现形式为

$$C_h (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'_h t + \mathbf{u}''_h t^2 + \dots) e^{\mu_h t}$$

的长期项。但在这种情况,只要所有的  $\operatorname{Re} \mu_h < 0$ , 和式也将在  $t \rightarrow \infty$  时趋于零。

于是微分方程(1)可以写成

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_{1k} \ddot{q}_k + b_{1k} \dot{q}_k + c_{1k} q_k) &= A e^{i\Omega t}, \\ \sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + b_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) &= 0 \quad (j=2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

我們来找形式为

$$q_k = B_k e^{i\Omega t} \quad (k=1, \dots, n) \quad (5)$$

的强迫振动。将  $q_k (k=1, \dots, n)$  的这些表达式代入微分方程(4), 并約去  $e^{i\Omega t}$ , 則得确定  $B_k$  值的一組代数方程:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n [a_{1k}(i\Omega)^2 + b_{1k}(i\Omega) + c_{1k}] B_k &= A, \\ \sum_{k=1}^n [a_{jk}(i\Omega)^2 + b_{jk}(i\Omega) + c_{jk}] B_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

( $j=2, \dots, n$ ).

解这組代数方程, 得:

$$B_k = W_{1k}(i\Omega) A \quad (k=1, \dots, n), \quad (7)$$

其中

$$W_{1k}(i\Omega) = \frac{\Delta_{1k}(i\Omega)}{\Delta(i\Omega)} \quad (8)$$

是关于  $i\Omega$  的实系数有理真分式函数; 此函数在复平面上的端图叫做頻率特性或幅-相特性, 有时候也把这函数本身叫做頻率特性或幅-相特性。

于是, 坐标  $q_k$  对外界作用  $Q_1 = A e^{i\Omega t}$  的“反应”可由这作用乘以頻率特性  $W_{1k}(i\Omega)$  而得到:

$$q_k = W_{1k}(i\Omega) A e^{i\Omega t}. \quad (9)$$

令

$$W_{1k}(i\Omega) = R_{1k}(\Omega) e^{i\psi_{1k}(\Omega)} \quad [R_{1k}(\Omega) > 0] \quad (10)$$

[ $R_{1k}(\Omega)$  —— 振幅特性,  $\psi_{1k}(\Omega)$  —— 相位特性], 則公式(9)可以

改写成如下形式:

$$q_k = R_{1k}(\Omega) A e^{i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} \quad (k=1, \dots, n). \quad (11)$$

現在設

$$Q_1 = A \sin \Omega t, \quad (12)$$

即

$$Q_1 = \frac{A}{2i} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}),$$

則对应的反应为<sup>①</sup>

$$q_k = \frac{1}{2i} R_{1k}(\Omega) A \{ e^{i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} - e^{-i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} \},$$

即

$$q_k = R_{1k}(\Omega) A \sin [\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]. \quad (13)$$

換句話說，由正弦型力(12)轉換为对应的反应——正弦型强迫振动(13)时，力的振幅被乘以振幅特性  $R_{1k}(\Omega)$ ，而相位的偏移决定于相位特性  $\Psi_{1k}(\Omega)$ 。

图 53 上画的是幅-相特性  $W_{1k}(i\Omega)$  ( $0 < \Omega < \infty$ )。若对于給定的  $\Omega$ ，对应的  $R_{1k}(\Omega)$  很小，則反应振幅和具有給定頻率  $\Omega$  的“激发”  $A \sin \Omega t$  的振幅相比較，也将非常小。反之，若在給定的  $\Omega$  之下，对应的  $R(\Omega)$  很大，則反应振幅比之广义力  $Q_1$  的振幅也将很大。因之，选择具有适当振幅特性的系統，便可以使一定頻率范围的振动消失，使其它頻率的振动振幅增大。此即滤波器的构造原理。

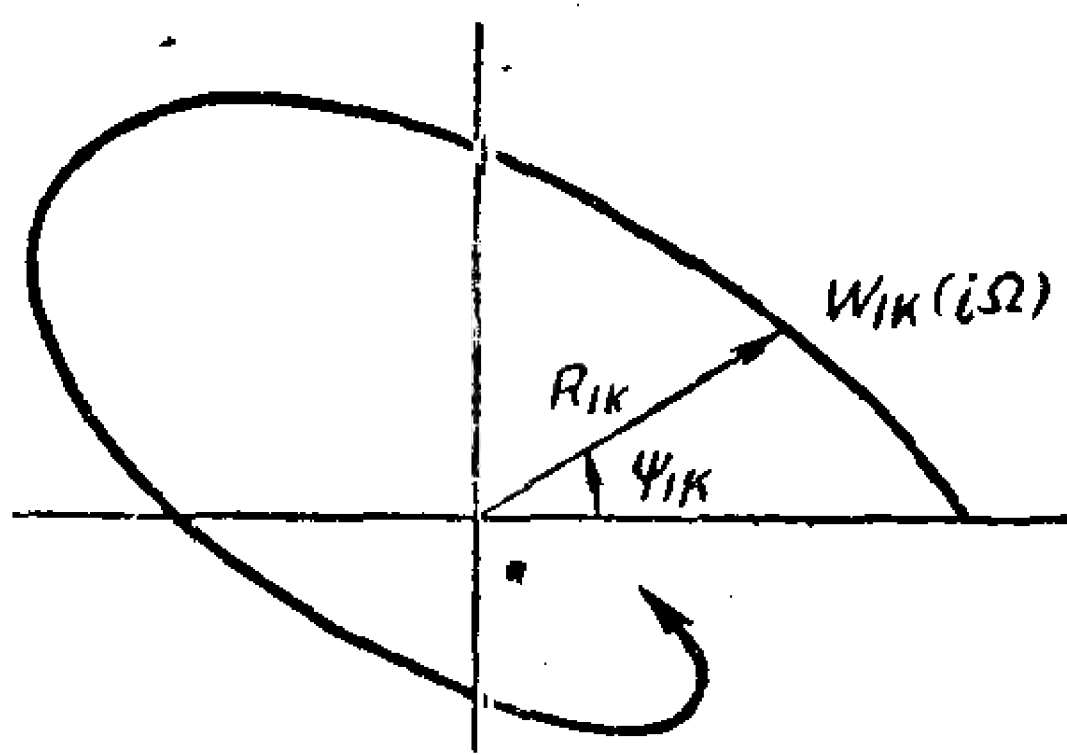


图 53.

由于  $W(i\Omega)$  是有理真分式函数，因而当  $\Omega \rightarrow \infty$  时， $W(i\Omega) \rightarrow$

<sup>①</sup> 因为  $W_{1k}(i\Omega)$  和  $W_{1k}(-i\Omega)$  是共轭复数，故  $R_{1k}(-\Omega) = R_{1k}(\Omega)$ ， $\Psi_{1k}(-\Omega) = -\Psi_{1k}(\Omega)$ 。

$\rightarrow 0$ , 故任何系統实际上仅能通过有限頻帶。

現在假設  $Q_1(t)$  是以富里哀級数給出的任一周期函数:

$$Q_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin(m\Omega t + \varphi_m). \quad (14)$$

将此級数各諧量所激发的反应相加, 便得到

$$q_k = \sum_{m=0}^{\infty} R_{1k}(m\Omega) A_m \sin[m\Omega t + \varphi_m + \Psi_{1k}(m\Omega)] \quad (15)$$

$$(k=1, \dots, n).$$

若  $Q_1(t)$  是关于  $t$  的任意非周期函数  $f(t)$ 。我們将它写成傅里叶积分<sup>①</sup>的形式:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt. \quad (16)$$

令

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt, \quad (17)$$

則有

$$Q_1 = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega. \quad (18)$$

函数  $F(\Omega)$  叫做函数  $Q_1 = f(t)$  的复譜。

外界作用

$$\frac{1}{2\pi} F(\Omega) d\Omega e^{i\Omega t}$$

所引起的反应为

$$\frac{1}{2\pi} W_{1k}(i\Omega) F(\Omega) d\Omega e^{i\Omega t}.$$

① 見, 例如, Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., 1956, т. 2, 24 章, § 3. 或 Фихтенгольц Г. М., 微积分学教程, 第三卷第三分册, 第十九章, § 6, 余家荣譯, 1955。——譯者注。



因之, 根据反应的綫性叠加原理, 便有:

$$q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{1k}(i\Omega) F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (19)$$

$$(k=1, \dots, n),$$

即坐标  $q_k$  的复譜  $W_{1k}(i\Omega)F(\Omega)$  可由外界作用  $Q_1(t)$  的复譜乘以对应的系統頻率特性  $W_{1k}(i\Omega)$  而得到。

假設当  $t < 0$  时, 系統处于靜止状态:

$$\left. \begin{aligned} Q_1(t) &= 0, \\ q_k(t) &= 0 \quad (k=1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \text{当 } t < 0 \text{ 时。} \quad (20)$$

将反应的复譜写成如下形式:

$$F(\Omega)W_{1k}(i\Omega) = G(\Omega) + iH(\Omega), \quad (21)$$

則由公式(19)便有:

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) + iH(\Omega)] [\cos \Omega t + i \sin \Omega t] d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \cos \Omega t - H(\Omega) \sin \Omega t] d\Omega + \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \sin \Omega t + H(\Omega) \cos \Omega t] d\Omega. \end{aligned}$$

因为  $q_k(t)$  是实函数, 故右端第二項等于零, 因之,

$$q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \cos \Omega t - H(\Omega) \sin \Omega t] d\Omega. \quad (22)$$

另一方面, 当  $t < 0$  时,  $q_k(t) = 0$ , 故有

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \cos \Omega t - H(\Omega) \sin \Omega t] d\Omega \quad (\text{当 } t < 0 \text{ 时}).$$

在此, 以  $-t$  代  $t$ , 則有:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \cos \Omega t + H(\Omega) \sin \Omega t] d\Omega \quad (\text{当 } t > 0 \text{ 时}). \quad (23)$$

将等式(22)和(23)逐项相加, 则得:

$$q_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\Omega) \cos \Omega t d\Omega \quad (\text{当 } t > 0 \text{ 时}). \quad (24)$$

现在假设外界作用的复谱可以写成如下形式:

$$F(\Omega) = A(\Omega) e^{i\Phi(\Omega)}. \quad (25)$$

于是, 按公式(21)便有:

$$G(\Omega) = R_{1k}(\Omega) A(\Omega) \cos[\Phi(\Omega) + \Psi_{1k}(\Omega)], \quad (26)$$

而公式(24)则可以写成如下的最终形式:

$$q_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{1k}(\Omega) A(\Omega) \cos[\Phi(\Omega) + \Psi_{1k}(\Omega)] \cos \Omega t d\Omega \quad (\text{当 } t > 0 \text{ 时}). \quad (27)$$

## 第七章 有循环坐标的系统

### § 48. 导出系统·罗司势·隐运动·赫兹关于动能产生势能的概念

本章将利用第二、五两章所讲的一般原理,来研究具有循环坐标  $q_\alpha (\alpha = m+1, \dots, n)$  的完整平稳系统的运动。这种系统的动能具有形式

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n a_{rs}(q_1, \dots, q_m) \dot{q}_r \dot{q}_s. \quad (1)$$

我们来找以罗司变量  $q_i, \dot{q}_i, p_\alpha (i=1, \dots, m; \alpha = m+1, \dots, n)$  表示的动能表达式。为此,利用原始关系

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^m a_{\alpha i} \dot{q}_i + \sum_{\beta=m+1}^n a_{\alpha \beta} \dot{q}_\beta \quad (\alpha = m+1, \dots, n) \quad (2)$$

将所有的  $\dot{q}_\alpha$  以  $p_\alpha (\alpha = m+1, \dots, n)$  表出。

由于行列式  $D = \det(a_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta=m+1}^n \neq 0$ <sup>①</sup>, 故由关系式(2)即可求得:

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} \left( p_\beta - \sum_{i=1}^m a_{\beta i} \dot{q}_i \right) \quad (\alpha = m+1, \dots, n), \quad (3)$$

其中  $\|b_{\alpha\beta}\|_{m+1}^n$  是矩阵  $\|a_{\alpha\beta}\|_{m+1}^n$  的逆矩阵, 即:

$$\|b_{\alpha\beta}\| = \|a_{\alpha\beta}\|^{-1}. \quad (4)$$

令

$$\gamma_{\alpha i} = \sum_{\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} a_{\beta i} \quad (i=1, \dots, m; \alpha = m+1, \dots, n), \quad (5)$$

① 見第 73 頁上的脚注。

则关系式(3)便可以写成如下形式:

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_\beta - \sum_{i=1}^m \gamma_{\alpha i} \dot{q}_i \quad (\alpha=m+1, \dots, n). \quad (6)$$

这里  $b_{\alpha\beta}$  和  $\gamma_{\alpha i}$  都是非循环坐标(或称之为位置坐标)  $q_i (i=1, \dots, m)$  的函数。将  $\dot{q}_\alpha$  的表达式(6)代入公式(1),即得以罗司变量表示的动能表达式  $\widehat{T}$ :

$$\widehat{T} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^n a_{\alpha\beta}^* p_\alpha p_\beta + \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=m+1}^n a_{i\alpha}^* \dot{q}_i p_\alpha. \quad (7)$$

妙的是在这个表达式中,所有  $a_{i\alpha}^* = 0$  (罗司早就注意到了这一点),即表达式  $\widehat{T}$  是非循环速度  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$  的二次型与广义冲量  $p_{m+1}, \dots, p_n$  的二次型之和<sup>①</sup>。

事实上,因为  $\sum_{\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_\beta$  仅与变量  $q_i$  和  $p_\beta$  有关,而这些变量又被看作是和  $\dot{q}_i (i=1, \dots, m; \beta=m+1, \dots, n)$  无关的,故

$$a_{i\alpha}^* = \frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial \dot{q}_i \partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{\beta=m+1}^n \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\beta=m+1}^n b_{\beta\alpha} p_\beta = 0. \quad (8)$$

我们现在计算系数  $a_{\alpha\beta}^*$ :

$$a_{\alpha\beta}^* = \frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \sum_{\gamma=m+1}^n \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \dot{q}_\gamma} \frac{\partial \dot{q}_\gamma}{\partial p_\beta} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \sum_{\gamma=m+1}^n b_{\gamma\beta} p_\gamma = b_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta=m+1, \dots, n). \quad (9)$$

类似地可以得到系数  $a_{ij}^*$ <sup>②</sup>:

① 这里所采用的由变量  $\dot{q}_i, \dot{q}_\alpha$  到变量  $\dot{q}_i, p_\alpha$  的变量变换,常被用于(按拉格朗日方法)化二次型为平方和的二次型理论中。事实上,将类似的变换运用若干次之后,就可以将  $n$  个变量的二次型化为  $n$  个二次型之和的形式,而这  $n$  个二次型的每一个只与一个变量有关(即一个变量的平方与某一实系数的乘积)。

② 这里及以后  $\dot{q}_\alpha = \dots$  都表示在方括弧里的表达式中,所有的  $\dot{q}_\alpha$  应以其表达式(6)代之。

$$\begin{aligned}
a_{ij}^* &= \frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right]_{\dot{q}_\alpha=\dots} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right]_{\dot{q}_\alpha=\dots} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\alpha=m+1}^n \gamma_{\alpha i} p_\alpha = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right]_{\dot{q}_\alpha=\dots} = \\
&= \frac{\partial^2 T'}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} + \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial^2 T'}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij} - \sum_{\alpha=m+1}^n \gamma_{\alpha i} a_{\alpha j}.
\end{aligned}$$

利用等式(5), 得:

$$a_{ij}^* = a_{ij} - \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} a_{\alpha j} a_{\beta i} \quad (i, j=1, \dots, m). \quad (10)$$

但根据等式(4),  $b_{\alpha\beta} = \frac{A_{\beta\alpha}}{D}$ , 其中  $A_{\beta\alpha}$  是行列式  $D$  中元素  $a_{\beta\alpha}$  的代数余子式。借此关系可将公式(10)写成

$$a_{ij}^* = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i,m+1} & \dots & a_{in} \\ a_{m+1,j} & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj} & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i, j=1, \dots, m). \quad (10')$$

于是, 公式(7)有如下形式:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \quad (11)$$

这里系数  $a_{ij}^*$  和  $b_{\alpha\beta}$  分别由等式(4)和(10)来决定。

假设作用在平稳系统上的力有势  $\Pi = \Pi(t, q_i)$ , 则  $L = T - \Pi$ 。

现在计算罗司函数(见 § 13):

$$\begin{aligned}
R &= R(t, q_i, \dot{q}_i, p_\alpha) = \sum_{\alpha=m+1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \\
&= \sum_{\alpha=m+1}^n p_\alpha \left( \sum_{\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_\beta - \sum_{i=1}^m \gamma_{\alpha i} \dot{q}_i \right) - T + \Pi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \\
&\quad + \Pi - \sum_{i=1}^m \left( \sum_{\alpha=m+1}^n \gamma_{\alpha i} p_\alpha \right) \dot{q}_i. \quad (12)
\end{aligned}$$

我们来考查被称为罗司势<sup>①</sup>的函数  $\Pi^*(t, q_i, p_\alpha)$ :

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \quad (13)$$

利用关系

$$b_{\alpha\beta} = \frac{A_{\beta\alpha}}{D}$$

(其中  $A_{\beta\alpha}$  是行列式  $D$  中元素  $a_{\beta\alpha}$  的代数余子式) 可将罗司势的表达式写成

$$\Pi^* = \Pi - \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} 0 & p_{m+1} & \cdots & p_n \\ p_{m+1} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (13')$$

的形式。此外, 令

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (14)$$

于是, 根据等式(12), 对于非循环坐标起着拉格朗日函数作用的函数  $-R$  便等于

$$T^* - V, \quad (15)$$

其中  $V$  是广义势, 由下式确定:

$$V = - \sum_{i=1}^m \left( \sum_{\alpha=m+1}^n \gamma_{\alpha i} p_\alpha \right) \dot{q}_i + \Pi^*(t, q_i, p_\alpha). \quad (16)$$

现在来考查原系统的任何一个运动。在此运动中,

① Routh E. G., The advanced part of a treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies, 5th. ed., 1892, § 99.

$$p_\alpha = \text{const} = c_\alpha \quad (\alpha = m+1, \dots, n), \quad (17)$$

非循环坐标  $q_i = q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 可由第 76 頁上的微分方程組 (8) 来确定, 这方程組中所有的  $p_\alpha$  全应代之以  $c_\alpha$  ( $\alpha = m+1, \dots, n$ )。但此方程組乃是拉格朗日函数为  $-R = T^* - V$  的某一輔助系統的拉格朗日方程組。該輔助系統乃一自然平稳系統, 有  $m$  个自由度,

动能  $T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j$ , 广义力的势

$$V = - \sum_{i=1}^m \left( \sum_{\alpha=m+1}^n \gamma_{\alpha i} c_\alpha \right) \dot{q}_i + \Pi^*(t, q_i, c_\alpha).$$

罗司势  $\Pi^*(t, q_i, c_\alpha)$  是該系統的势能。由公式 (11) — (13) 可得:

$$T + \Pi = T^* + \Pi^*. \quad (18)$$

我們称此輔助系統为导出系統。

因此, 非循环坐标  $q_1, \dots, q_m$  的变化决定了动能为  $T^*$ , 广义势为  $V = V_1 + \Pi^*$  ( $\Pi^*$  是罗司势), 自由度为  $m$  的导出系統的运动。在原系統和导出系統的对运动运动中, 二系統总能量彼此相等。

当决定导出系統的运动函数  $q_i = q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 已經求得时, 循环坐标随时间的变化  $q_\alpha = q_\alpha(t)$  ( $\alpha = m+1, \dots, n$ ) 便可由第 76 頁上的公式 (9) 来决定, 这些公式現在可以写成如下形式:

$$q_\alpha = \int \left[ \frac{\partial \Pi^*(t, q_i, c_\alpha)}{\partial c_\alpha} - \sum_{j=1}^m \gamma_{\alpha j}(q_i) \dot{q}_j \right] dt + c'_\alpha$$

$$(\alpha = m+1, \dots, n). \quad (19)$$

我們来看原系統的动能表达式 (1) 不包含非循环速度  $\dot{q}_i$  和循环速度  $\dot{q}_\alpha$  之积的这一特殊情况, 即所有的  $a_{i\alpha} = 0$  ( $i = 1, \dots, m; \alpha = m+1, \dots, n$ )。在此情况下, 动能  $T$  被分为两个二次型, 其一仅包含非循环速度  $\dot{q}_i$ , 而另一个仅包含循环速度  $\dot{q}_\alpha$ 。这种系統叫做迴轉无关系統。对于迴轉无关系統, 根据公式 (5), 所有的  $\gamma_{\alpha i} = 0$ ,

因而,  $V_1=0, V=\Pi^*$ 。因此, 如果原系统是迴轉无关的, 则导出系统具有通常的势  $\Pi^*$ ①。

此外, 由等式(10)可知, 对于迴轉无关系统,  $a_{ij}^*=a_{ij}$  ( $i, j=1, \dots, m$ ), 即

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (20)$$

在此情形, 原系统有动能

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta,$$

和势能  $\Pi = \Pi(t, q_i)$ , 而导出系统则有动能

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

和势能

$$\Pi^* = \Pi(t, q_i) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta.$$

这表明 原系统的部分动能  $\left( \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta \right)$  转化为导出系

统的势能。

关于平稳系统的前述种种论断, 对于保守系统 [对此系统有  $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ , 即  $\Pi = \Pi(q_i)$ ] 仍然正确。迴轉无关的保守系统, 其导出系统仍然是保守的。

假设给定一任意保守系统, 它有  $m$  个自由度, 动能为

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(q_1, \dots, q_m) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

① 在导出系统上, 作用着有势力  $-\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i}$  和决定于势  $V_1$  的迴轉仪力。在迴轉无关系统的情况下,  $V_1=0$ , 因之没有迴轉仪力。



势能为  $\Pi^* = \Pi^*(q_i)$ 。另外,考查这样一个保守系统,它有  $m+1$  个自由度,有  $m$  个位置坐标  $q_1, \dots, q_m$ , 一个循环坐标  $q_{m+1}$ 。

设新系统的势能  $\Pi = 0$ , 动能有如下形式:

$$T = T^* + \frac{1}{2} \frac{k}{\Pi^*(q_i)} \dot{q}_{m+1}^2 \quad (k = \text{const}).$$

于是

$$p_{m+1} = \frac{k}{\Pi^*(q_i)} \dot{q}_{m+1},$$

以及

$$T = T^* + \frac{1}{2k} \Pi^*(q_i) p_{m+1}^2.$$

而当  $p_{m+1} = c_{m+1} = \sqrt{2k}$  时,

$$\frac{1}{2k} \Pi^*(q_i) p_{m+1}^2 = \Pi^*(q_i).$$

因此,给定的保守系统有动能  $T^*$  和势能  $\Pi^* = \Pi^*(q_i)$ , 而新的“扩展”系统有  $T = T^* + \Pi^*(q_i)$ ,  $\Pi = 0$ 。

给定系统的势能可来自自由度较大的“扩展”系统的动能。

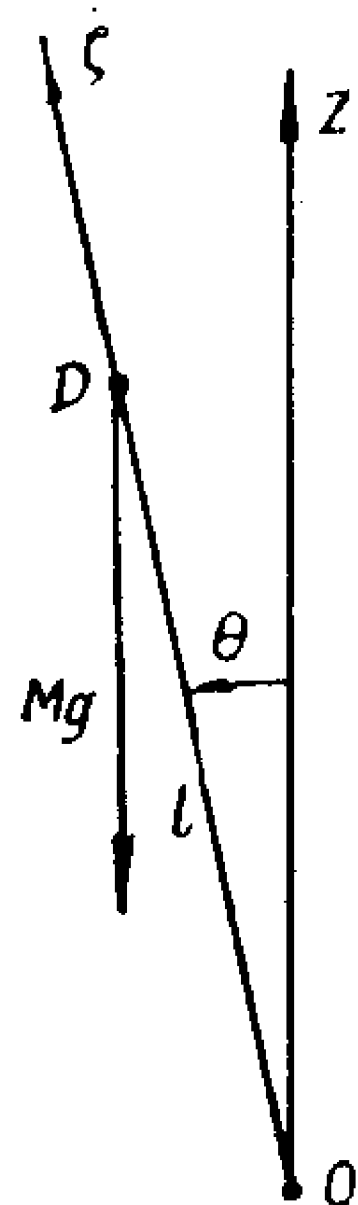
仅循环坐标(隐坐标)在改变的那种运动,有时称为隐运动①。

前面我们已经看到, 保守系统的势能永远可以看作隐运动的动能。

关于动能产生势能的这一概念,亦即动能产生作用在实现显运动(非隐运动)的物体上的力的概念,曾由赫兹在其“力学原理”(1894年)②一书中广为发展。

① 包含迴轉仪的系统是表现隐运动的明显例子。由于迴轉仪的“隐”运动,使得这种系统和无迴轉仪的系统在运动上有着显著的差别。

② Герц Г., Принципы механика, изложенные в новой связи, М., 1959, 也可以参阅 Thomson W. and Tait P., Treatise on natural philosophy, Part 1, § 319 及 А. Вебстер, Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, М., 1933, 第五章。



**例题.** 我们来看刚体绕定点  $O$  运动的拉格朗日情况: 刚体有动力对称轴, 且重心  $D$  位于此轴上, 作用力为其重量  $Mg$ 。

刚体的位置可借三个欧拉角  $\theta, \psi, \varphi$  给定, 其中章动角  $\theta$  是铅直轴  $Oz$  和动力对称轴  $O\xi$  间的夹角 (图 54),  $\psi$  是进动角,  $\varphi$  是自转角。令  $l = OD$ ,  $A$  和  $C$  分别表示赤道转动惯量和轴转动惯量。于是, 有:

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2, \quad \Pi = Mgl \cos \theta,$$

式中  $p, q, r$  是角速度  $\omega$  分别在惯性主轴  $O\xi, O\eta, O\zeta$  上的投影。但

$$p^2 + q^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.$$

图 54. 因之最后便有:

$$2T = A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2, \quad \Pi = Mgl \cos \theta. \quad (21)$$

由此即得对应于循环坐标  $\varphi, \psi$  的广义冲量  $p_\varphi, p_\psi$  的表达式:

$$\left. \begin{aligned} p_\psi &= (A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \dot{\psi} + C \cos \theta \dot{\varphi}, \\ p_\varphi &= C \cos \theta \dot{\psi} + C \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

由这些关系中解出  $\dot{\psi}$  和  $\dot{\varphi}$ , 得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{p_\psi - \cos \theta p_\varphi}{A \sin^2 \theta}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{-C \cos \theta p_\psi + (A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) p_\varphi}{AC \sin^2 \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(23)式右端  $p_\psi$  和  $p_\varphi$  的系数乃是量  $b_{\alpha\beta}$ 。将  $\dot{\varphi}$  和  $\dot{\psi}$  的表达式 (23) 代入 (21)式中关于  $2T$  的表达式, 或直接根据公式(11)①, 我们便得到以罗司变量  $\theta, \dot{\theta}, p_\psi, p_\varphi$  表示的动能表达式:

$$2T = A\dot{\theta}^2 + \frac{Cp_\psi^2 - 2C \cos \theta p_\psi p_\varphi + (A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta)p_\varphi^2}{AC \sin^2 \theta}. \quad (24)$$

当系统运动时, 冲量  $p_\psi$  和  $p_\varphi$  保持其值不变:

$$p_\psi = a, \quad p_\varphi = b. \quad (25)$$

章动决定于

$$T^* = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2, \quad \Pi^* = Mgl \cos \theta + \frac{(a - b \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} + \frac{b^2}{C} \quad (26)$$

① 在所给情况下, 刚体是迴轉无关系统。此时, 在公式(11)中,  $a_{ij}^* = a_{ij} (i, j = 1, \dots, m)$ 。

的导出系统。

章动角的变化  $\theta = \theta(t)$  可由如下的能量积分求得：

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + Mgl \cos \theta + \frac{(a - b \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} = \text{const} = h. \quad (27)$$

现在引入一个辅助变量  $u = \cos \theta$ , 并以  $\frac{2}{A}(1 - u^2) = \frac{2}{A} \sin^2 \theta$  乘等式 (27) 的两端, 得:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u), \quad (28)$$

其中  $f(u)$  是关于  $u$  的三次多项式:

$$f(u) = \frac{2}{A}(h - Mgl u)(1 - u^2) - \frac{2}{A^2}(a - bu)^2. \quad (29)$$

在此表达式中令  $u = \pm 1$ ,  $u = u_0 = \cos \theta_0 < 1$ , 则得①:

$$f(-1) < 0, \quad f(u_0) = \left(\frac{du}{dt}\right)_0^2 > 0, \quad f(+1) < 0.$$

又因  $f(+\infty) = +\infty$ , 故多项式  $f(u)$  有三个实根  $u_1 = \cos \theta_1$ ,  $u_2 = \cos \theta_2$  和  $u'$ , 而且,

$$-1 < u_1 < u_2 < 1 < u'.$$

多项式  $f(u)$  的图形如图 55 所示。

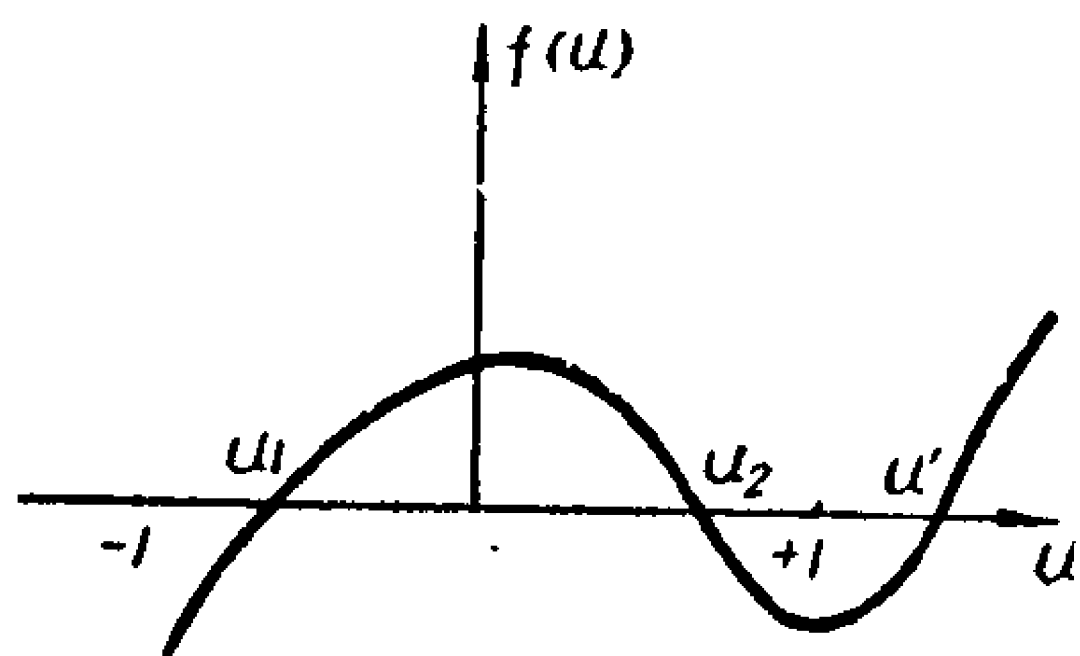


图 55.

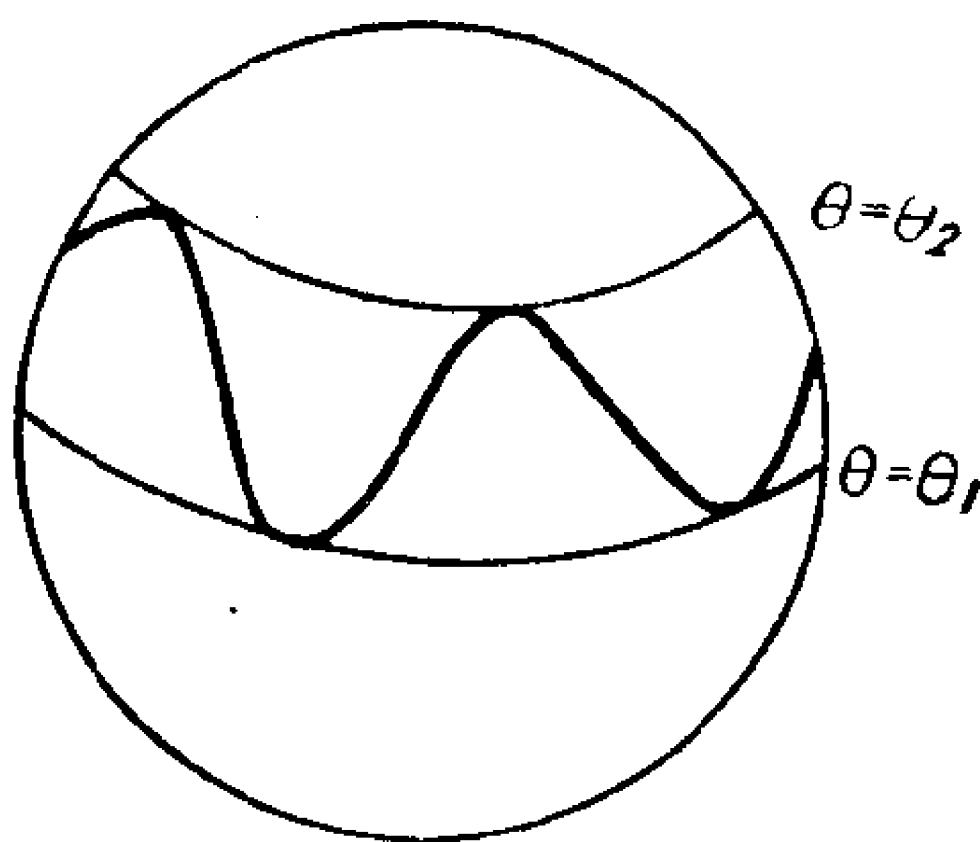


图 56.

因为当物体运动时,  $-1 \leq u = \cos \theta \leq +1$ ,  $f(u) = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \geq 0$ , 故量  $u = \cos \theta$  应在区间  $u_1 \leq u \leq u_2$  内变化, 即  $\theta_1 \geq \theta \geq \theta_2$ 。进动角速度可由 (23) 式中头一个公式来确定:

① 这里我们假设  $a \neq \pm b$ 。 $a = \pm b$  的特殊情况将在下面讨论。此外, 初始值  $\theta_0$  是这样选择的, 它使得  $\theta_0 \neq 0$ , 因而,  $\left(\frac{du}{dt}\right)_0 \neq 0$ 。

$$\dot{\psi} = \frac{a - b \cos \theta}{A \sin^2 \theta}. \quad (30)$$

若比值  $\frac{a}{b}$  在区间  $u_1 \leq u \leq u_2$  之外, 则进动速度  $\dot{\psi}$  不变号, 进动永远朝着一个方向行进。此时,  $Oz$  轴在以  $O$  为中心的球面上截出一条如图 56 所示之曲线。

若  $u_1 < \frac{a}{b} < u_2$ , 则进动速度将在  $\cos \theta^* = \frac{a}{b}$  时变号, 动力对称轴在球面上截出一条如图 57 所示的曲线。

若  $\frac{a}{b} = u_2$ , 则进动速度  $\dot{\psi}$  不变号, 但在高纬圈  $\theta = \theta_2$  处变为零 (图 58)①。

章动角的变化可以解析地由下列公式确定:

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = t + \text{const}, \quad \theta = \arccos u. \quad (31)$$

这里, 当  $\theta$  由  $\theta_2$  变到  $\theta_1$  时取“+”号, 当  $\theta$  按相反方向改变时取“-”号。显然,  $\theta$  角随时间的变化是周期的, 周期为

$$\tau = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}, \quad (32)$$

我们以  $\theta(t)$  记此函数。求得章动角的变化  $\theta = \theta(t)$  之后, 角  $\psi$  和角  $\varphi$  的变化便可按公式(23)来确定。

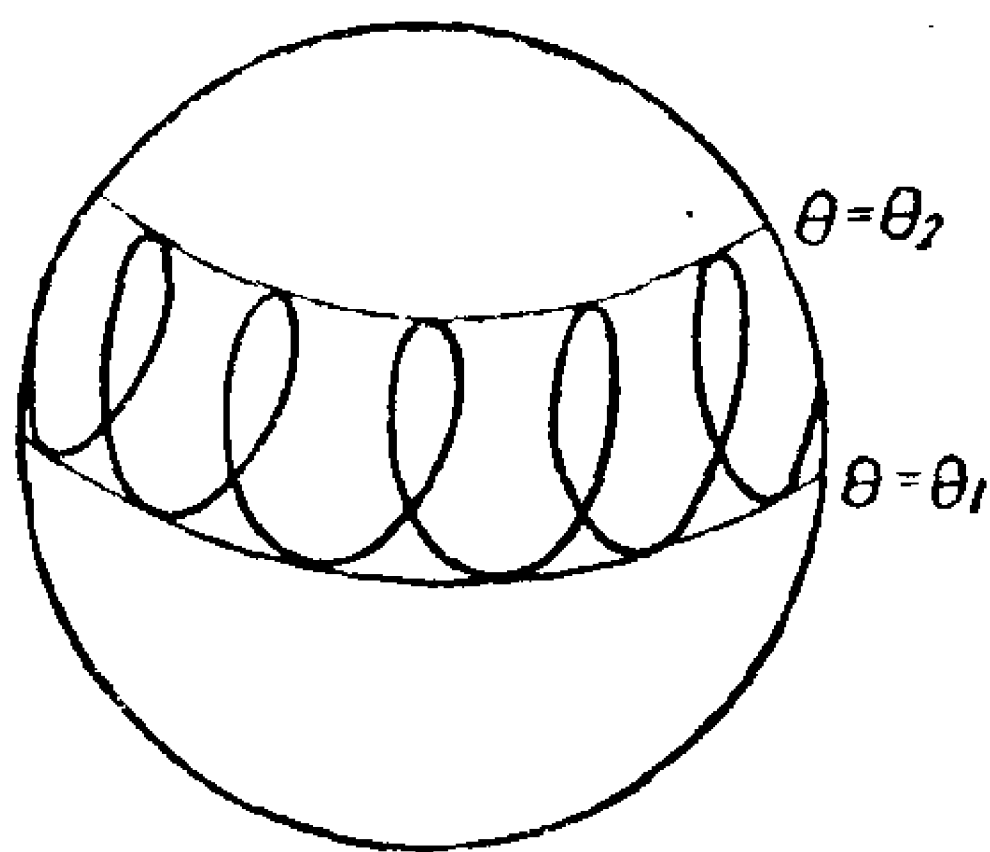


图 57.

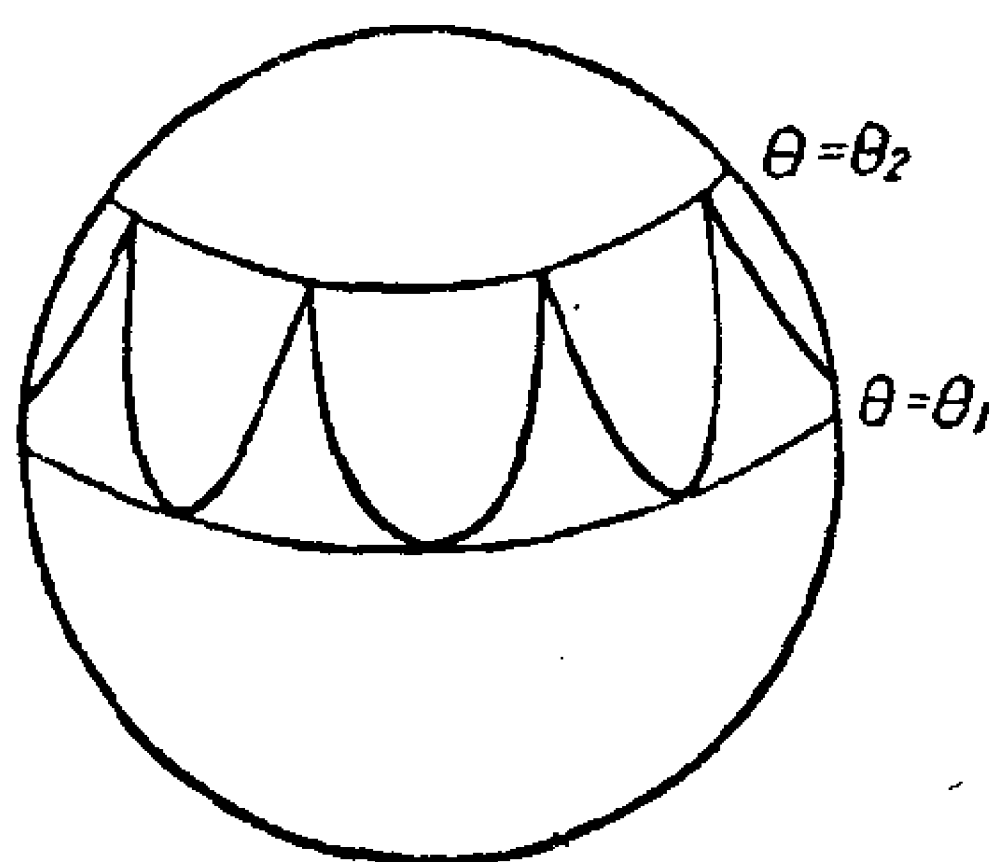


图 58.

现在来考察刚体通过“奇异”位置  $\theta = 0$  时的运动。在这个点上, 动能由如下的、退化了的二次型[见当  $\theta = 0$  时的表达式(21)]来给定:

① 可以证明  $\dot{\psi}$  不可能在低纬圈上变为零。

$$2T = A\dot{\theta}^2 + C(\dot{\psi} + \dot{\phi})^2. \quad (33)$$

根据公式(22), 在奇点  $\theta = 0$  处, 等式  $p_\psi = p_\phi$  应当成立, 即

$$a = b. \quad (34)$$

若令任意常数  $a$  和  $b$  满足关系式(34), 则罗司势表达式(26)的不确定性将不复存在①:

$$\Pi^* = Mgl \cos \theta + \frac{a^2}{A} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}.$$

于是, 章动仍可由能量积分  $T^* + \Pi^* = \text{const}$  来确定。

若运动通过“奇异”位置  $\theta = \pi$ , 则将有关系式

$$a = -b,$$

代替(34)且罗司势的表达式取如下形式:

$$\Pi^* = Mgl \cos \theta + \frac{a^2}{A} \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}.$$

在所讨论的两种“奇异”情况下, 图 56—58 上的高纬圈或低纬圈都分别退化为一点。

## § 49. 平稳运动的稳定性

我们来考察一保守系统, 它的位置可由  $m$  个位置坐标  $q_i$  和  $n-m$  个循环坐标  $q_\alpha$  ( $i=1, \dots, m; \alpha=m+1, \dots, n$ ) 给定。该系统的运动决定于正则方程组:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r=1, \dots, n), \quad (1)$$

其中系统的总能量  $H = H(q_i, p_i, p_\alpha)$  具有

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n c_{rs}(q_1, \dots, q_m) p_r p_s + \Pi(q_1, \dots, q_m) \quad (2)$$

的形式, 且其右端的二次型是正定的②。当系统运动时, 函数  $H$  和广义冲量  $p_\alpha$  ( $\alpha=m+1, \dots, n$ ) 均保持其值不变, 即这些量都是运动

① 在  $\Pi^*$  的表达式中我们去掉了可加常数  $\frac{b^2}{B}$ 。

② 这个二次型乃是以广义冲量表示的系统的动能。

积分:

$$\left. \begin{aligned} H(q_i, p_i, p_\alpha) &= H(q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0) \\ p_\alpha &= p_\alpha^0 \quad (\alpha = m+1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

若在系统运动中, 所有位置坐标保持常值  $q_i = \text{const} = q_i^0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), 则此运动称为平稳运动。

在平稳运动中, 所有位置速度都等于零, 因而按照方程(1)和等式(2)便有:

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^m c_{ik}(q_i^0) p_k + \sum_{\alpha=m+1}^n c_{i\alpha}(q_i^0) p_\alpha^0 = 0 \quad (i=1, \dots, m). \quad (4)$$

由这些关系式可以断定<sup>①</sup>, 在平稳运动中, 所有非循环冲量也将保持常值  $p_i = \text{const} = p_i^0$ 。由于  $\dot{q}_i = \dot{p}_i = 0$  ( $i=1, \dots, m$ ), 故由方程(1)推知: 在平稳运动中,

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad (i=1, \dots, m). \quad (5)$$

方程(5)乃是使按初值  $q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0$  ( $i=1, \dots, m; \alpha=m+1, \dots, n$ ) 所决定的运动成为平稳运动时, 这些初值所应满足的必要充分条件。

还应注意的是, 按照方程(1),

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \sum_{s=1}^n c_{\alpha s}(q_i^0) p_s^0 = \text{const} \quad (\alpha = m+1, \dots, n), \quad (6)$$

故在平稳运动中, 循环速度  $\dot{q}_\alpha$  ( $\alpha = m+1, \dots, n$ ) 的值也不变。因此,

$$q_\alpha = \dot{q}_\alpha^0 (t - t_0) + q_\alpha^0 \quad (\alpha = m+1, \dots, n). \quad (7)$$

初始循环坐标  $q_\alpha^0$  是任意常数, 不在条件(5)中出现。

① 因为二次型  $\sum_{r,s=1}^n c_{rs} p_r p_s$  是正定的, 所以行列式  $\det[c_{ik}(q_j^0)]_{i,k=1}^m \neq 0$ , 因而

可由关系式(4)将非循环冲量  $p_k$  解出来。

因此,在平稳运动中,位置坐标保持常值,而循环坐标按线性规律改变。

**例题.** 对称重力陀螺的规则进动是平稳运动。

事实上,规则进动为如下等式所刻画:

$$\theta = \text{const} = \theta_0, \quad \dot{\psi} = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = \text{const},$$

其中进动角  $\psi$  和自转角  $\varphi$  都是循环坐标,而陀螺对称轴和铅直方向的夹角  $\theta$ ——章动角则是位置坐标<sup>①</sup>。

我们应当注意,按照关系式(6),初值  $q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0$  的微小改变将引起初始循环速度  $\dot{q}_\alpha^0 (\alpha = m+1, \dots, n)$  的微小改变。但是,按照公式(7),量  $\dot{q}_\alpha^0$  的微小变化将使循环坐标本身的改变,随着时间的增长要多大就有多大。因此,就循环坐标而言,平稳运动不可能稳定。

往下我们将把平稳运动的稳定性理解为就所有冲量  $p_i$  和  $p_\alpha$  以及位置坐标  $q_i (i=1, \dots, m; \alpha = m+1, \dots, n)$  而言的稳定性<sup>②</sup>。

于是,如下的平稳运动稳定性准则成立:

若函数  $H(q_i, p_i, p_\alpha)$  在点  $q_i = q_i^0, p_i = p_i^0 (i=1, \dots, m)$  有严格极值,则初始数据为  $q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0 (i=1, \dots, m; \alpha = m+1, \dots, n)$  的运动是稳定的平稳运动。

事实上,由于函数  $H(q_i, p_i, p_\alpha)$  有极值,故量  $q_i^0, p_i^0 (i=1, \dots, m)$  和量  $p_\alpha^0 (\alpha = m+1, \dots, n)$  一同满足方程(5),因之,所讨论的运动首先是平稳的。现在引入偏差:

$$\xi_i = q_i - q_i^0, \eta_i = p_i - p_i^0, \eta_\alpha = p_\alpha - p_\alpha^0.$$

于是,当取运动积分  $H(q_i^0 + \xi_i, p_i^0 + \eta_i, p_\alpha^0)$  作为李亚普诺夫函数时,在循环冲量  $p_\alpha$  不受扰动(即这些量对于被扰运动和未被扰运动有相同的值  $p_\alpha^0$  <sup>③</sup>)的假设下,便可以作出关于零解  $\xi_i = 0, \eta_i = 0$

① 由前节公式(21)可见,坐标  $\varphi$  和  $\psi$  都不显含在动能和势能的表达式中。

② 或关于量  $q_i, \dot{q}_i, p_\alpha (i=1, \dots, m; \alpha = m+1, \dots, n)$  的稳定性,也一样。

③ 罗司所讨论的正是这种类型的稳定性。

的稳定性(即平稳运动的稳定性)的結論(見第 178 頁)。

但上述稳定性准則, 对于被扰运动偏差  $\eta_\alpha = p_\alpha - p_\alpha^0$  ( $\alpha = m + 1, \dots, n$ ) 可能异于零的一般情况下, 仍然是有效的<sup>①</sup>。为了证实这一論断, 只要取函数

$$[H(q_i^0 + \xi_i, p_i^0 + \eta_i, p_\alpha^0) - H(q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0)]^2 + \sum_{\alpha=m+1}^n \eta_\alpha^2 \quad (8)$$

作为李亚普諾夫函数, 并利用李亚普諾夫定理的推論(第 178 頁)就行了。函数(8)是一个运动积分, 在  $\xi_i = 0, \eta_i = 0, \eta_\alpha = 0$  ( $i = 1, \dots, m; \alpha = m + 1, \dots, n$ ) 时有严格极小值, 等于零。

現在来建立平衡状态稳定性和平稳运动稳定性之間的类比关系。为此, 我們考察有  $m$  个独立坐标  $q_1, \dots, q_m$  的导出系統, 它的势能等于罗司势:

$$\Pi^*(q_i, p_\alpha^0) = \Pi(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n b_{\alpha\beta}(q_i) p_\alpha^0 p_\beta^0 \quad (9)$$

(見前一节)。在导出系統上, 除有势力  $-\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 而外, 还作用有迴轉仪力。因为与原系統的平稳运动  $q_i = q_i^0, p_\alpha = p_\alpha^0$  ( $i = 1, \dots, m; \alpha = m + 1, \dots, n$ ) 相对应的是导出系統的平衡位置, 故量  $q_i^0, p_\alpha^0$  应滿足方程

$$\frac{\partial \Pi^*(q_i, p_\alpha^0)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (10)$$

这是存在平稳运动的必要充分条件。显然, 这些条件和条件(5)是等价的, 可由条件(5)消去量  $p_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 后得到。将拉格朗日定理用于导出系統的平衡位置  $q_i = q_i^0$ , 即得如下形式的平稳运动稳定性准則。

若罗司势  $\Pi^*(q_i, p_\alpha^0)$  在  $q_i = q_i^0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 时有严格极小值,

① Пожарицкий Г. К., Прикладная математика и механика, т. 22, вып. 2, 1958.





$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2 + M(\dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2 + \dot{z}_D^2), \quad \Pi = Mgz_D.$$

这里  $p, q, r$  是角速度  $\omega$  在中心惯性主轴上的投影。但

$$p^2 + q^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta, \quad r = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta, \quad z_D = -d \cos \theta,$$

故

$$2T = (A + Md^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + A \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + Cr^2 + M(\dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2),$$

$$\Pi = -Mgl \cos \theta.$$

$x_D, y_D, \varphi$  和  $\psi$  都是循环坐标。与之对应的冲量在运动中保持常值，即

$$\begin{aligned} p_x = M\dot{x}_D = \alpha, \quad p_y = M\dot{y}_D = \beta, \quad p_\varphi = Cr = \gamma, \\ p_\psi = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta = \delta. \end{aligned} \quad (12)$$

此外还有

$$p_\theta = (A + Md^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}.$$

以变量  $\theta, p_x = \alpha, p_y = \beta, p_\theta, p_\varphi = \gamma, p_\psi = \delta$  表示的哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H = \frac{p_\theta^2}{2(A + Md^2 \sin^2 \theta)} + \frac{1}{2A} \left( \frac{\delta - \gamma \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 - Mgd \cos \theta + \\ + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2M} = \frac{p_\theta^2}{A + Md^2 \sin^2 \theta} + \Pi^*, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\Pi^* = \frac{1}{2A} \left( \frac{\delta - \gamma \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 - Mgd \cos \theta + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2M} \quad (14)$$

是罗司势①。

平稳运动的存在条件(5)，在此有如下形式：

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \theta} = 0, \quad p_\theta = 0.$$

稳定性条件是：在  $p_\theta = 0$  和某一待求的  $\theta$  值上，函数  $H$  有严格极值。当函数  $\Pi^*$  在这个  $\theta$  值上有严格的极小值时稳定性条件将被满足。为了求得这个值  $\theta = \theta_0$ ，我们令  $u = \cos \theta$ ，

$$f(u) = A\Pi^* = \frac{1}{2} \frac{(\delta - \gamma u)^2}{1 - u^2} - Ku + \text{const} \quad (K = AMgd),$$

则

$$f'(u) = \frac{-\gamma\delta u^2 + (\gamma^2 + \delta^2)u - \gamma\delta}{(1 - u^2)^2} - K,$$

$$f''(u) = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{(1 - u^2)^3} (1 - 3\mu u + 3u^2 - \mu u^3),$$

其中

① 在讨论中我们除去  $\theta = 0$  和  $\theta = \pi$  这两个奇异值。因此， $\sin \theta \neq 0$ 。

$$\mu = \frac{2\gamma\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \quad \text{①}$$

設方程  $f'(u) = 0$  有  $|u| < 1$  的根  $u_0$ 。与这个值  $|u| = \cos\theta$  相对应的是球的平稳运动, 在此运动中, 球心作等速直线移动,  $\varphi$  角和  $\psi$  角按线性规律变化。

为了查明平稳运动的稳定性, 先来证明当  $|u| < 1$  时  $f''(u) > 0$ 。事实上, 如果当  $|u| < 1$  时  $f''(u) = 0$ , 则由  $f''(u)$  的表达式得  $\mu = \frac{1+3u^2}{u^3+3u}$ 。由此不难看出, 当  $|u| < 1$  时  $|\mu| > 1$ , 但这是不可能的, 因为  $\mu = \frac{2\gamma\delta}{\gamma^2 + \delta^2}$ 。因此, 当  $|u| < 1$  时  $f''(u) \neq 0$ , 即  $f''(u)$  在区间  $(-1, +1)$  内不变号。但  $f''(0) = \gamma^2 + \delta^2 > 0$ , 故当  $|u| < 1$  时  $f''(u) > 0$ 。

由于

$$A \frac{d\Pi^*}{d\theta^2} = f''(u) \sin^2\theta - f'(u) \cos\theta = f''(u) \sin^2\theta > 0,$$

故在所讨论的  $\theta$  值上, 函数  $\Pi^*$  有严格极小值, 即对应的平稳运动稳定。

令  $\delta = \gamma u + A\dot{\psi}(1-u^2)$  [見(12)式], 則平稳运动的存在条件  $f'(u) = 0$  可予以改造。

若再将  $\gamma = Cr = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta)$  代入所得之等式, 則此条件取最后形式如下:

$$C\dot{\varphi}\dot{\psi} + (C-A)\dot{\psi}^2 \cos\theta + Mgd = 0. \quad (15)$$

这是在外力矩  $Mgd \sin\theta$  (鉛直反力  $N = Mg$  对极点  $D$  之矩) 作用下存在規則进动的著名条件。

現在来分別討論三种情况。

1°. 如果

$$|Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}| > |A-C|\dot{\psi}^2,$$

則不可能有实的  $\theta$  值滿足条件(15), 因而也不可能存在具有这种角速度的平稳运动。

2°. 如果  $|Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}| < |A-C|\dot{\psi}^2$ , 而且  $Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}$  和  $A-C$  同号, 則在这样的角速度之下, 有平稳运动存在, 而且  $\cos\theta > 0$ 。

3°. 如果同样地有  $|Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}| < |A-C|\dot{\psi}^2$ , 但  $Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}$  和  $A-C$  异

①  $\gamma^2 + \delta^2 > 0$ , 因为当  $\gamma = \delta = 0$  时, 函数  $\Pi^* = -Mgd \cos\theta$  在  $\theta = 0$  处有严格极小值。

号, 则在平稳运动中  $\cos\theta < 0$ 。在这种情况下, 存在稳定的平稳运动, 在此运动中重心高于球的几何中心。

现在来看奇异情况。

a)  $\theta_0 = 0$ 。此时由公式(12)得  $\gamma = \delta$ 。因此

$$f'(u) = -\frac{\gamma^2}{(1+u)^2} - K,$$

$$A\left(\frac{d\Pi^*}{d\theta}\right)_{\theta=0} = f'(u)(-\sin\theta_0) = 0,$$

$$A\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = f'(u)(-\cos\theta_0) = \frac{\gamma^2}{(1+u_0^2)} + K > 0.$$

平稳运动永远是稳定的。

b)  $\theta_0 = \pi$ 。由公式(12)得:  $\gamma = -\delta$ 。因此

$$f'(u) = \frac{\gamma^2}{(1-u)^2} - K,$$

$$A\left(\frac{d\Pi^*}{d\theta}\right)_{\theta=\pi} = f'(u)(-\sin\theta_0) = 0,$$

$$A\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2}\right)_{\theta=\pi} = f'(u)(-\cos\theta_0) = \frac{\gamma^2}{(1-u_0)^2} - K = \frac{\gamma^2}{4} - K.$$

当满足条件

$$\frac{\gamma^2}{4} > K$$

时, 平稳运动是稳定的, 这个条件可以更具体地写作

$$C^2 r^2 > 4AMgd. \quad (16)$$

若不等式(16)成立, 则在所讨论的情况中, 即使重心位于球的几何中心之上, 绕铅直轴的转动也将是稳定的平稳运动。

## 参考书目

- Аппель П., Теоретическая механика, т. I и II, перев. с франц., Физматгиз, 1960.
- Булгаков В. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.
- Бабаков И. М., Теория колебаний, Гостехиздат, 1958. (有中譯本)
- Валле Пуссен Ш. Ж., Лекции по теоретической механике, перев. с франц., Издательство, т. I, 1948; т. II, 1949.
- Вариационные принципы, сборник статей под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, 1959.
- Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.
- Голдстейн Г., Классическая механика, перев. с англ., Гостехиздат, 1957.
- Зигель К. М., Лекции по небесной механике, перев. с нем., Издательство, 1959.
- Зоммерфельд А., Механика, перев. с нем., Издательство, 1947.
- Картан Э., Интегральные инварианты, перев. с франц., Гостехиздат, 1940.
- Лагранж Ж. Л., Аналитическая механика, т. I, II, перев. с франц., Гостехиздат, 1950.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, Физматгиз, 1958. (有中譯本)
- Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Теоретическая механика, ч. III, ОНТИ, 1934. (有中譯本)
- Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
- Мак-Миллан В. Д., Динамика твердого тела, перев. с англ., Издательство, 1951.

- Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952. (有中譯本)
- Меркин Д. Р., Гироскопические системы, Гостехиздат, 1956. (有中譯本)
- Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Изд. ЛГУ, 1938.
- Суслов Г. К., Основы аналитической механики, Изд. 2-е, Киев, 1911—1912; изд. 3, переработанное Н. Н. Бухгольцем и В. К. Гольцманом под названием: Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944.
- Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, перев. с англ., ОНТИ, 1937.
- Четаев Н. Г., Устойчивость движения, изд. 2-е, Гостехиздат, 1955. (有中譯本)
- Якоби К., Лекции по динамике, перев. с нем., ГОНТИ, 1936.
- Corben H. C., Stehle Ph., Classical mechanics, Wiley, New York; Chapman, London, 1950.
- Lanczos C., The variational principles of mechanics, Toronto, Univ. Toronto Press, 1949.
- Routh E. T., The advanced part of a Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 6th ed., London, Macmillan, 1905.
-

## 人名索引

### 四画

巴巴柯夫(Бабаков И. М.) 218, 255  
巴貝辽夫(Бобылев Д. К.) 91  
巴热林茨基(Пожарицкий Г. К.) 250  
巴拉克(Полак Л. С.) 255  
太特(Tait P.) 243  
瓦列·布謝(Валле Пуссен\*) V, 255

### 五画

布卡果夫(Булгаков Б. В.) 255  
布赫果里茨(Бухгольц Н. Н.) 256  
司契尔(Stehle Ph.) 256  
司土克(Stocker J.) 188  
外布司特尔(Webster A. G.) 243  
卡拉肖道利(Carathéodory C.) 150  
卡当(Cartan E.) VI, 114, 255  
卡尔宾(Corben H.) 256

### 六画

达朗伯(D'Alembert J.) 24  
吉別里(Кибель И. А.) 101  
刘維(Liouville J.) 120, 122, 146  
列納尔(Lienard A.) 193  
米哈依洛夫(Михайлов А. В.) 195  
托里拆利(Torricelli E.) 165  
亥姆霍兹(Helmholtz H.) 106

### 七画

亚里司多德(Aristotle) 19  
希巴尔(Шипар М. \*) 193  
伯努利(Bernoulli J.) 19  
伽利略(Galilei G.) 19, 21  
狄利赫里(Dirichlet L.) 165  
克林(Крейн М. Г.) 217, 221, 222, 255

庫兰特(Courant R.) 215

李华宗 117

李瓦尔托夫斯基(Ливартовский И. В.) 187

李夫西茨(Лифшиц Е. М.) 63, 255

李亚普諾夫(Ляпунов А. М.) 168, 170, 175, 187, 255

麦尔金(Меркин Д. Р.) 256

麦尔心(Мереев М. \*) 223

劳澤(Розе Н. В.) 111, 111, 256

苏斯洛夫(Суслов Г. К.) V, 29, 59, 110, 256

### 八画

泊松(Poisson S.) 79

波亚几哥尔斯基(Пятигорский Л.) 82

罗司(Routh E. J.) 73, 193, 238, 240, 249, 251, 256

拉格朗日(Lagrange J.) 14, 66, 111, 165, 205, 255

阿热尔曼(Айзерман М. А.) 187, 193

阿沛尔(Appel P.) 51, 255

### 九画

哈密頓(Hamilton W.) 65, 67, 85, 134

柯欽(Кочин Н. Е.) 101

洛强斯基(Лойцянский Л. Г.) 59, 255

費馬(Fermat P.) 110

費赫金果里茨(Фихтенгольц Г. М.) 102, 234

費舍尔(Фишер Е. \*) 215

契塔也夫(Четаев Н. Г.) 168, 170,  
177, 180, 256

欧拉(Euler L.) 20

### 十画

馬克米兰(MacMillan W.) 255

馬克斯威尔(Maxwell J.) 220

馬尔金(Малкин Н. Г.) 170, 256

哥尔德斯坦(Goldstein H.) 150, 255

哥里茨曼(Гольцман В. К.) 256

唐肯(Donkin W.) 68

朗道(Ландау Л. Д.) 63, 82, 255

朗操司(Lanczos C.) 256

莫培督(Maupertuis P.) 110

### 十一画以上

龐伽雷(Poincaré J. H.) VI, 114, 187

澤盖尔(Зегель К. \*) 255

雅科毕(Jacobi C.) 79, 109, 135, 256

勒襄德(Legendre A.) 68

维尔斯特拉斯(Weierstrass K.) 205

惠更斯(Huyghens C.) 21

惠特克(Whittaker E.) 107, 229,  
256

索莫非尔德(Sommerfeld A.) 255

湯姆孙(Thomson W.) 243

路里耶(Лурье А. И.) 59, 255

奥斯特罗格拉得斯基(Остроградский  
М. В.) 85

瑞利(Rayleigh J.) 216

塞尔维司特(Sylvester J.) 41

赫兹(Hertz H.) 243

霍尔维茨(Hurwitz A.) 193

\*号表示俄譯音。



# 索引

## 二画至四画

力学金律, 19  
分离变量法, 137  
广义冲量, 65  
广义能量积分, 70  
广义坐标, 27  
广义总能量, 70  
广义力, 30  
广义速度, 35  
广义加速度, 35  
广义势, 61  
广义保守系统, 70

## 五画

可能位移, 5  
可能速度, 5  
可积微分约束, 2  
主振动, 205  
主动力, 9  
平稳运动, 248  
平稳约束, 3  
平稳系统, 3  
平衡位置, 18  
正则变换, 123  
正则变换的必要充分条件, 126  
正则变换的母函数, 126  
正则变换的价, 126  
半完整约束, 3  
加速度能, 55

## 六画

关联表达式, 66  
米哈依洛夫准则, 195

列纳尔-希巴尔条件, 193  
自由正则变换, 127  
自由刚体的平衡条件, 19  
自由度, 8  
自由系统, 1  
自然系统, 61  
达朗贝尔原理, 24  
托里拆利原理, 20, 165  
伪坐标, 53  
伪速度, 53  
伪加速度, 54  
有限约束, 1  
刘维定理, 122, 146  
有势力, 42  
亥姆霍兹定理, 106

## 七画

麦尔心定律, 223  
位置坐标, 238  
平稳运动的稳定性准则, 249  
李华中定理, 117  
李亚普诺夫运动稳定性定理, 177  
李亚普诺夫定理 I (关于平衡的不稳定性), 169  
李亚普诺夫定理 II (关于平衡的不稳定性), 170  
李亚普诺夫函数, 175  
动力学普遍方程, 13  
动势, 60  
动焦点, 91  
坐标空间, 27  
状态空间, 163

完整系統, 3

条件稳定性, 175

### 八画

阿沛尔方程, 55

长期(特征)方程, 183, 200

长期方程根的分隔定理, 218

拉格朗日作用量, 110

拉格朗日不定乘子, 14, 15

拉格朗日变量, 66

拉格朗日括弧, 156

拉格朗日定理, 165

拉格朗日函数, 60

运动方程的积分, 78

罗司-霍尔維茨条件, 193

罗司变量, 73

罗司势, 240

罗司方程, 74

罗司函数, 73

势能(力之势), 42

单价正则变换, 126

泊松括弧, 78

泊松恒等式, 80

非完整约束, 3

非完整系統, 3

非固执约束, 4

非有势力, 42

非自由系統, 1

非平稳系統, 3

固执约束, 4

定耗散系統, 48

### 九画

哈密頓变量, 66

哈密頓原理, 85

哈密頓方程, 67

哈密頓函数, 68

哈密頓主函数, 131

哈密頓-雅科毕方程, 131

哈密頓作用量, 84

相对积分不变量, 116

相空間, 106

点正则变换, 130

约束, 1

约束反力, 8

迴轉仪力, 47

迴轉无关系統, 241

第一类拉格朗日方程, 15

第二类拉格朗日方程, 35

保守系統, 44

总能量变化定理, 42

契塔也夫定理, 171

欧拉角, 28

速度环量, 102

速度渦量(旋度), 103

### 十画

特征(长期)方程, 184, 200

唐肯定理, 68

莫培督-拉格朗日原理, 110

馬克斯威尔互易性原理, 220

耗散力, 45

耗散的(系統), 45

### 十一画

虚位移, 6

虚位移原理, 18

渦綫, 105

能量积分, 45

渦流守恒定理, 103

勒襄德变换, 68

接触变换, 127

漸近稳定的平衡位置, 171

理想约束, 9

### 十二画

統計系綜, 121

绝对积分不变量, 116

費馬原理, 111

瑞利定理, 216

瑞利耗散函数, 47

雅科毕定理, 132

雅科毕-泊松定理, 81

雅科毕方程, 109

湯姆孙定理, 102

惠特克方程, 107

循环坐标, 75

### 十三画以上

龐伽雷-卡当积分不变量, 96

龐伽雷-卡当积分不变量的流体动力学  
解釋, 101

龐伽雷通用积分不变量, 114

微分約束, 1

塞尔維司特不等式, 41

稳定性的几何准則, 195

稳定度, 186

稳定平衡位置, 160

頻率特性, 232

增广相空間, 91

增广坐标空間, 84

增广坐标空間中的路徑, 84

增广坐标空間中的旁路, 85

增广坐标空間中的正路, 85

簡正坐标, 169, 208

霍尔維茨多項式, 195

霍尔維茨行列式, 193

[ G e n e r a l   I n f o r m a t i o n ]

书名= 高等学校教学用书      分析力学讲义

作者= ф. п. 甘特马赫著      钟奉俄      薛问西译

页数= 2 6 1

S S 号= 1 0 1 3 0 0 6 8

出版日期= 1 9 6 3 年0 6 月第1 版

前言

目录  
序

第一章	任意质点系统的运动微分方程
1	自由系统和非自由系统· 约束及其分类
2	可能位移和虚位移· 理想约束
3	动力学普遍方程· 第一类拉格朗日方程
4	虚位移原理· 达朗伯原理
5	完整系统· 独立坐标· 广义力
6	独立坐标下的第二类拉格朗日方程
7	拉格朗日方程的研究
8	总能量变化定理· 有势力· 回转仪力和耗散力
9	机电模拟
10	非完整系统的阿沛尔方程· 伪坐标
第二章	势场中的运动方程
11	有势力情况下的拉格朗日方程· 广义势· 非自然系统
12	哈密顿正则方程
13	罗司方程
14	循环坐标
15	泊松括弧
第三章	变分原理和积分不变量
16	哈密顿原理
17	第二种型式的哈密顿原理
18	力学基本积分不变量 (庞伽雷- 卡当积分不变量)
19	基本积分不变量的流体动力学解释· 场姆孙和亥姆霍兹
	关于环量和涡量的定理
20	广义保守系统· 惠特克方程· 雅科毕方程· 莫培督- 拉
	格朗日最小作用量原理
21	惯性运动· 保守系统的任意运动与测地线的关系
22	庞伽雷通用积分不变量· 李华宗定理
23	相空间的体积不变性· 刘维定理
第四章	正则变换和哈密顿- 雅科毕方程
24	正则变换
25	自由正则变换
26	哈密顿- 雅科毕方程
27	分离变量法· 例题
28	正则变换在摄动理论中的应用
29	任意正则变换的结构
30	变换的正则性准则· 拉格朗日括弧
31	正则变换雅科毕矩阵的耦对性
32	正则变换下泊松括弧的不变性
第五章	系统的平衡稳定性及其运动稳定性
33	关于平衡位置稳定性的拉格朗日定理
34	平衡位置不稳定准则· 李亚普诺夫和契塔也夫定理
35	平衡位置的渐近稳定性· 耗散系统

3 6 . 条件稳定性· 问题的一般提法· 运动或任一过程的稳定性· 李亚普诺夫定理

3 7 . 线性系统的稳定性

3 8 . 按线性近似的稳定性

3 9 . 渐近稳定性准则

第六章 微振动

4 0 . 保守系统的微振动

4 1 . 简正坐标

4 2 . 周期性外力对保守系统振动的影响

4 3 . 保守系统频率的极端性质· 频率随系统惯性和刚性而变的瑞利定理· 约束对频率的影响

4 4 . 弹性系统的微振动

4 5 . 在不显含时间的力的作用下，平稳系统的微振动

4 6 . 瑞利耗散函数· 小耗散力对保守系统振动的影响

4 7 . 与时间有关的外力对平稳系统微振动的影响· 幅- 相特性

第七章 有循环坐标的系统

4 8 . 导出系统· 罗司势· 隐运动· 赫兹关于动能产生势能的概念

4 9 . 平稳运动的稳定性

参考书目

人名索引

索引